Algebra2 Intenzív verzió

1. ZH – megoldások

2012. március 30.

1. A karakterisztikus polinom $(2-x)(x-1)^2$. A minimálpolinom $(x-2)(x-1)^2$ (definíció szerint ennek 1 kell, hogy legyen a főegyütthatója), hiszen a Cayley-Hamilton tétel szerint osztója a karakterisztikus polinomnak és minden sajátérték gyöke. Viszont egyszerű behelyettesítéssel adódik, hogy az $(x-2)(x-1)$ polinomnak nem gyöke a mátrix. Így az 1 sajátértékhez tartozó legnagyobb blokk mérete 2, azaz a Jordán-féle normálalak $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. A kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ennek karakterisztikus polinomja $x(x-1)(6-x)$, azaz a sajátértékek: 0, 1 és 6. A 0-hoz tartozó normált sajátvektor $\begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, az 1-hez tartozó $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, a 6-hoz tartozó pedig $\begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$ (illetve ezek ellentettjei is jók). A négyzetösszeg alak ebből: $x^2 + 4xy + 5y^2 + 2yz + z^2 = \frac{(x-2z)^2+(2x+5y+z)^2}{5}$.

3. Igaz. Egyrész $U \subseteq U + W$, ezért ami $U + W$ elemeire merőleges, az U elemeire is, azaz $(U + W)^\perp \subseteq U^\perp$, hasonlóan $(U + W)^\perp \subseteq W^\perp$, azaz $(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$. Másrészt ha $x \in U^\perp \cap W^\perp$, akkor $\beta(x, u + w) = \beta(x, u) + \beta(x, w) = 0 + 0 = 0$ minden $u \in U$-ra és $w \in W$-re. Viszont $U + W$ minden eleme $u + w$ alakú, ezért $x \in (U + W)^\perp$, azaz $U^\perp \cap W^\perp \subseteq (U + W)^\perp$.

4. Ha $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor $r(X) = \dim(\mathrm{Im}(X))$. Node $\dim(\mathrm{Im}(X)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(X))$, ezért elég belátni, hogy $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^*A)$. Viszont $Av = 0$-ból nyilván következik $A^*Av = 0$, az $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(A^*A)$. Másrészt ha $A^*Av = 0$, akkor

$$0 = (A^*Av, v) = (Av, Av) = \|Av\|^2 .$$

Viszont ez azt jelenti, hogy $Av = 0$, hiszen $(\cdot, \cdot)$ pozitív definit.

5. Legyenek $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ és a hozzájuk tartozó sajátvektorok rendre $v_1, \ldots, v_n$. Ekkor mivel különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért $\{v_1, \ldots, v_n\}$ egy bázis V-ben. Legyen ψ egy φ-vel felcserélhető lineáris transzformáció. Ekkor ψ felcserélhető $\varphi - \lambda_i\mathrm{id}$-del is $(i = 1, \ldots, n)$, így $\langle v_i \rangle = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i\mathrm{id})$ egy ψ-invariáns altér. Ez viszont pont azt jelenti, hogy v_i sajátvektora ψ-nek is, tehát ψ-nek van sajátbázisa, azaz diagonalizálható.

6. Legyen $m_M(x) \in K[x]$ az M mátrix minimálpolinomja. Mivel M invertálható, a 0 nem sajátértéke, azaz $m_M(0) \neq 0$. Ez pont azt jelenti, hogy $m_M(x)$ és x relatív prímek a $K[x]$

polinomgyűrűben. Mivel $K[x]$-ben elvégezhető az euklideszi algoritmus, ezért van olyan $f, g \in K[x]$ polinom, melyekre $f(x)x + m_M(x)g(x) = 1$. Ebbe $x = M$-et behelyettesítve azt kapjuk, hogy $I = f(M)M + m_M(M)g(M) = f(M)M$, azaz $M^{-1} = f(M)$.

7. *I. bizonyítás:* Először belátjuk, hogy $\mathrm{tr}((AB)^k) = \mathrm{tr}((BA)^k)$ minden $k \geq 1$-re. Vegyük észre, hogy $(AB)^k = AB \cdots AB = AC$ és $(BA)^k = BA \cdots BA = CA$, ahol $C = B \cdots AB$. Ismeretes (volt múlt félévben), hogy AC és CA nyoma megegyezik, így $(AB)^k$ és $(BA)^k$ nyoma is. Node ha AB sajátértékei (multiplicitással) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, és BA sajátértékei (multiplicitással) $\mu_1, \ldots, \mu_n$, akkor azt kaptuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^k$$

minden $k \geq 1$-re. Viszont a Newton-Girard-formulákból következik, hogy az elemi szimmetrikus polinomok is kifejezhetők a hatványösszegekből, ezért a λ_j-k ill. μ_j-k elemi szimmetrikus polinomjai is megegyeznek. Ezek viszont épp a karakterisztikus polinom együtthatói (előjeltől eltekintve), tehát a két karakterisztikus polinom is egyenlő.

II. bizonyítás: Legyen I az $n \times n$-es egységmátrix, O pedig a 0-mátrix. Vegyük észre, hogy az $\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}$ inverze éppen a $\begin{pmatrix} I & -A \\ O & I \end{pmatrix}$ blokkmátrix. Ezért a $\begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix}$ mátrix hasonló a

$$\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ B & BA \end{pmatrix}$$

mátrixhoz, azaz karakterisztikus polinomjaik megegyeznek. Node az előbbi karakterisztikus polinomja $(-x)^n k_{AB}(x)$, utóbbié pedig $(-x)^n k_{BA}(x)$, és ezek egyenlőségéből következik a kívánt állítás.