Algebra2 Intenzív verzió

9. gyakorlat

2012. május 3.

1. Tegyük föl, hogy a G csoport rendjében a p prím első hatványon szerepel. Igazoljuk, hogy a p-Sylow részcsoportok száma épp a p-rendű elemek számának a $p-1$-edrésze.

2. Legyen P egy p-Sylow G-ben, és $N \lhd G$. Igazoljuk, hogy $(PN)/N$ egy p-Sylowja G/N-nek, és $P \cap N$ egy p-Sylowja N-nek.

3. Mely véges csoportoknak van csak egy maximális részcsoportja?

4. Igazoljuk, hogy ha $p < q < r$ prímek, akkor nincs pqr rendű egyszerű csoport.

5. Igazoljuk, hogy nincs 200, 204, 260, 616 rendű egyszerű csoport.

6. Határozzuk meg az alábbi csoportok kommutátorrészcsoportját: D_n, Q, S_n, A_n, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.

7. Adjunk példát olyan csoportra, melyben a kommutátorok nem alkotnak részcsoportot.

8.* Igazoljuk, hogy a 3-dimenziós ($\mathbb{R}$ feletti) euklideszi tér egybevágóságainak $E(3)$ csoportja nem feloldható.

9. Igazoljuk, hogy ha $N, K \lhd G$ feloldható normálosztók G-ben, akkor NK is az.

10. Igazoljuk (Burnside kétprímes tételének felhasználása nélkül), hogy ha p prím és $\alpha \geq 0$ egész, akkor minden $4p^\alpha$ rendű csoport feloldható.

11. *a*) Igazoljuk, hogy ha $N \lhd G$ és $K \leq N$ karakterisztikus részcsoport, akkor $K \lhd G$.

    b) Melyek azok az Abel-csoportok, melyeknek nincs nemtriviális karakterisztikus részcsoportja?

    c) Igazoljuk, hogy minden G véges feloldható csoport minden minimális normálosztója (azaz olyan $N_1 \neq \{1\}$ normálosztója, mely nem tartalmaz valódi $N_1 \supsetneq K \neq \{1\}$ részcsoportot, melyre $K \lhd G$) elemi Abel p-csoport, azaz Z_p^n direkt hatvánnyal izomorf valamilyen p prímre és $n \geq 1$ egészre.

    d) Igazoljuk, hogy feloldható csoport minden maximális részcsoportja prímhatvány indexű.

12. Igazoljuk, hogy ha G egy nemkommutatív véges egyszerű csoport, akkor minden valódi részcsoportjának indexe legalább 5.

13. Igazoljuk, hogy izomorfia erejéig csak egyetlen 60-rendű egyszerű csoport van. (Segítség: keressünk a Sylow-tételek segítségével egy legfeljebb 5 indexű $H < G$ valódi részcsoportot, majd tekintsük G hatását a H szerinti mellékosztályokon. Ez megad egy $G \to S_5$ homomorfizmust.)