Algebra2 Intenzív verzió

8. gyakorlat

2012. április 19.

Legyen G egy csoport. Egy $g \in G$ elem konjugáltosztálya a hgh^{-1} alakú elemek halmaza, ahol $h \in G$.

1. Igazoljuk, hogy ha G véges csoport, akkor $g \in G$ konjugáltosztályának elemszáma épp a centralizátorának az indexe.

2. Határozzuk meg az alábbi csoportok összes elemének centralizátorát és konjugáltosztályát: D_n, Q, S_4, S_5, A_4, A_5, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.

3. Bizonyítsuk be, hogy az $(12\cdots n) \in S_n$ elem centralizátora pontosan az általa generált részcsoport.

4. Legyen G egy csoport, és $H \leq G$ egy részcsoport. Bizonyítsuk be, hogy az $N_G(H) \to \mathrm{Aut}(H)$ természetes homomorfizmus magja $C_G(H)$. (Mi ez a természetes homomorfizmus?)

5. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Aut}(Z_n) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ (azaz a modulo n redukált maradékosztályok csoportja).

6. Hány elemű az $\langle (12\cdots n)\rangle \leq S_n$ részcsoport normalizátora S_n-ben?

7. Legyen $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, és $T \leq G$ a diagonális invertálható mátrixok csoportja. Bizonyítsuk be, hogy $C_G(T) = T$. Melyik ismert csoporttal izomorf $N_G(T)/T$?

8.* Legyen $U \leq G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ azon felsőháromszög-mátrixok csoportja, melyekben a főátló elemei 1-esek. Mi $N_G(U)$?

9. Adjunk példát olyan G csoportra és $X \subseteq G$ részhalmazra, melyre $X \not\subseteq N_G(X)$.

10. Legyen G egy véges csoport, melynek rendje $2^t m$, ahol m páratlan, és $a \in G$ egy 2^t-rendű elem. Bizonyítsuk be, hogy $N_G(\langle a\rangle) = C_G(a)$.

11. Legyen $M \lhd G$ és $N \lhd G$ normálosztók a G csoportban. Bizonyítsuk be, hogy $G/(M \cap N)$ izomorf $G/M \times G/N$ egy részcsoportjával.

12. Melyik ismert csoporttal izomorf az S_4 csoport 2-Sylow részcsoportja?

13.* Osztályozzuk a p^3-rendű csoportokat izomorfia erejéig, ahol p prímszám.

14. Bizonyítsuk be, hogy véges p-csoportban minden maximális részcsoport indexe p, és minden p indexű részcsoport normálosztó (és persze maximális).

15. Legyen P egy p-Sylow G-ben, és $N \lhd G$. Mutassuk meg, hogy $P \cap N$ egy p-Sylowja N-nek, $(PN)/N$ pedig p-Sylowja G/N-nek.

16. (Frattini-elv) Legyen $N \lhd G$ és P egy p-Sylowja N-nek. Bizonyítsuk be, hogy $G = NN_G(P)$, és hogy $N_G(P)$ tartalmazza G egy p-Sylowját.

17. Mutassuk meg, hogy azon felsőháromszög-mátrixok, melyeknek a főátlójában 1-esek vannak, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ egy p-Sylow részcsoportját alkotják.

18. Bizonyítsuk be, hogy nincsen 56 rendű egyszerű csoport.

19.* Legyenek $p \neq q$ prímek, és $\alpha > 0$. Igazoljuk, hogy nincs $p^\alpha q$ rendű egyszerű csoport.

Megjegyzés: Burnside híres kétprímes tétele, hogy ha $p \neq q$ prímek, akkor nincsen $p^a q^b$ rendű egyszerű csoport (ahol a és b nemnegatív egészek). Ennek – minden ismert – bizonyítása csoportreprezentációelméletet használ, amit (ha az idő engedi) a 4. félévben fogunk tanulni.