Algebra2 Intenzív verzió

5. gyakorlat

2012. március 22.

1. Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból a vektorokból, melyek koordinátaösszege nulla. Határozzuk meg az $(1, 2, 3, 4)$ pont távolságát ettől a „hipersík”-tól.

2. Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis egy euklideszi térben. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan $c_1, \ldots, c_n$ bázis létezik, melyre $(b_i, c_j) = \delta_{ij}$.

3. Egy n-dimenziós valós euklideszi térben maximálisan hány olyan nemnulla vektor adható meg, melyek közül bármely kettő szöge α, ha $\alpha = 60°$, illetve ha $\alpha = 120°$?

4. Igazoljuk, ha $\varphi^2 = 0$, akkor $\varphi(v) \perp \varphi^*(v)$ minden $v \in V$-re. Igaz-e a megfordítás $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett?

5. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Ker}(\varphi^*) = \mathrm{Im}(\varphi)^\perp$ és $\mathrm{Im}(\varphi^*) = \mathrm{Ker}(\varphi)^\perp$.

6. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi^*\varphi = 0$-ból következik, hogy $\varphi = 0$.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi^*\psi = 0$, akkor $\mathrm{Im}(\varphi + \psi) = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\psi)$.

8. Mutassuk meg, hogy egy normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek. Igaz-e a megfordítás?

9. Legyenek φ és ψ normális transzformációk. Igaz-e, hogy ha felcserélhetok, akkor megegyeznek a sajátvektoraik? Igaz-e a megfordítás?

10. Igazoljuk, hogy a φ transzformáció pontosan akkor normális, ha $\|\varphi(v)\| = \|\varphi^*(v)\|$ minden $v \in V$-re.

11. Mutassuk meg, hogy egy transzformáció akkor és csak akkor merőlegességtartó, ha egy unitér (illetve ortogonális) transzformáció skalárszorosa.

12. Igazoljuk, hogy φ akkor és csak akkor normális, ha φ és φ^* sajátvektorai ugyanazok.

13. Igazoljuk, hogy ha A és B önadjungált, akkor AB akkor és csak akkor önadjungált, ha $AB = BA$.

14. A sík forgatásai, tükrözései, nyírásai közül melyek ortogonálisak illetve szimmetrikusak? A bázis a szokásos. Változik-e az eredmény ha egy másik ortonormált bázist veszünk?

15. Bizonyítsuk be, hogy ha φ ortogonális és szimmetrikus, akkor φ^2 az identitás. Megfordítható-e ez az állítás?

16. Transzformáljuk négyzetösszeggé **ortonormált bázisban** a 4. feladatsor 1. feladatában megadott $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$ és $-3x\overline{x} + 4ix\overline{y} - 4i\overline{x}y + 3y\overline{y} - z\overline{z}$ kvadratikus alakokat.

17. Legyen α egy pozitív definit, β pedig egy tetszoleges bilineáris függvény egy véges dimenziós $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ feletti vektortéren. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas bázisban α is és β is diagonális. Szükséges-e feltenni, hogy α (vagy β) pozitív definit?

18. Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor normális, ha A^* polinomja A-nak.

19. Legyen φ normális transzformáció egy V valós euklideszi téren. Bontsuk φ minimálpolinomját irreducibilis polinomok szorzatára, majd bizonyítsuk be, hogy V felbomlik legfeljebb kétdimenziós alterek ortogonális direkt összegére. Adjunk új bizonyítást ortogonális transzformációk kanonikus alakjára.

20. Határozzuk meg a valós euklideszi síkon az összes normális transzformációt.

21.* Igaz-e, hogy ha A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konjugált $\mathbb{C}^{n\times n}$-ben, akkor konjugált $\mathbb{R}^{n\times n}$-ben is?