Algebra2 Intenzív verzió

4. gyakorlat

2012. március 8.

1. Tekintsük a $-x^2+10xy-y^2-z^2$ és a $-3x\overline{x}+4ix\overline{y}-4i\overline{x}y+3y\overline{y}-z\overline{z}$ kvadratikus alakot $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett. Írjuk fel ezek mátrixát, transzformáljuk őket négyzetösszeggé, végül határozzuk meg karakterüket.

2. Mely testek fölött diagonalizálható az $x_1y_2 + x_2y_1$ szimmetrikus bilineáris függvény? A valós test esetében adjuk meg az összes ortogonális bázist.

3. Legyen q kvadratikus alak egy valós feletti vektortéren, $e_1, \ldots, e_n$ egy q-ortogonális bázis, és $U = \langle e_i \mid q(e_i) > 0\rangle$, $V = \langle e_i \mid q(e_i) \geq 0\rangle$, $W = \langle e_i \mid q(e_i) = 0\rangle$. E három altér közül melyek függetlenek az $e_1, \ldots, e_n$ bázistól?

4. Ellentmond $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - (x - y)^2$ a tehetetlenségi tételnek? (Mindkettő négyzetösszeg, de az egyikben van egy mínusz előjel is. Hogy lehet ez?)

5. Igazoljuk, hogy minden komplex bilineáris függvény egyértelműen írható $\alpha+\beta i$ alakban, ahol α és β Hermite-ikus.

6. Legyen β pozitív definit bilineáris függvény. Igaz-e, hogy tetszőleges $v_1, \ldots, v_n$ vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha a $|((\beta(v_i, v_j))|$ determináns nullától különböző?

7. Mely valós szimmetrikus bilineáris függvényekre eleme minden nem nulla vektor egy ortogonális bázisnak?

8. Mely β komplex bilineáris függvényekre igaz, hogy $\beta(u, v) = 0 \iff \beta(v, u) = 0$?

9. Legyen e_1, e_2, e_3 a 3-dimenziós euklideszi tér egy ortonormált bázisa. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\left\{a_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3); \quad a_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3); \quad a_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3)\right\}$$

is ONB.

10. Igazoljuk, hogy a legfeljebb n-edfokú komplex együtthatós polinomok az

$$(f, g) := \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)dt$$

skalárszorzattal egy $(n + 1)$-dimenziós euklideszi teret alkotnak. Az $1, x, x^2, \ldots$ polinomokból kiindulva a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás milyen polinomokat szolgáltat?

11.* Legyenek a $P_n(x)$ polinomok a következőképpen definiálva:

$$P_0(x) := 1, \quad P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left((x^2-1)^n\right)}{dx^n} \quad (n \geq 1).$$

Bizonyítsuk be, hogy a valós együtthatós polinomok vektorterében a $P_n(x)$ polinomok ortogonális rendszert alkotnak, ha a skalárszorzatot az

$$(f, g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

képlettel definiáljuk. (Ezek az ún. Legendre-polinomok.)

12.* Adjuk meg explicite $P_n(x)$-et $1 \leq n \leq 4$ esetén és bizonyítsuk be, hogy $P_n(1) = 1$ minden n-re teljesül.

13.* Bizonyítsuk be, hogy $P_n(x)$-nek pontosan n különböző valós gyöke van, amelyek mind a $(-1, 1)$ nyílt intervallumba esnek.

14.* Keressünk olyan skaláris szorzást a valós együtthatós polinomok vektorterén, melyre nézve a $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$ képlettel definiált Csebisev-polinomok ortogonális rendszert alkotnak.