Algebra2 Intenzív verzió

2. gyakorlat

2012. február 23.

1. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.

2. a) Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges K test feletti polinom előáll egy alkalmas K feletti vektortéren értelmezett lineáris transzformáció karakterisztikus polionomjaként.

   b) Igaz-e az állítás karakterisztikus polinom helyett minimálpolinommal?

   c) Igaz-e, hogy ha f egy k-adfokú polinom, és $k \leq n$, akkor f egy alkalmas $n \times n$-es mátrix minimálpolinomja?

3. Hány dimenziós alteret generálnak egy $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció nemnegatív egész kitevőjű hatványai?

4. Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha A nilpotens $n \times n$-es mátrix, akkor $A^n = 0$.

6. Legyen V véges dimenziós, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $0 \neq v \in V$. Jelölje továbbá $m_{A,v}$ azt a minimális fokú normált polinomot, melyre $m_{A,v}(A)v = 0$. Igazoljuk a következőket:

   a) A minimálpolinomja m_A az összes $m_{A,v}$ legkisebb közös többszöröse, midőn v befutja V-t.

   b) $W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ épp a v-t tartalmazó legszűkebb A-invariáns altér.

   c) $\dim(W) = \deg(m_{A,v})$.

   d) Ha m_A-nak van k-adfokú irreducibilis osztója, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.

   e) Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).

   Határozzuk meg az $m_{A,v}$ polinomot tetszőleges v esetén, ha A a síkon egy tengelyes tükrözés, egy forgatás, valamint ha A a deriválás a polinomok vektorterén.

7. Igaz-e, hogy egy $n \times n$-es $\mathbb{C}$ feletti mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha sajátaltereinek összege az egész tér?

8. Legyen A egy komplex elemű mátrix. Igaz-e, hogy ha *a*) $A^{2011} = I$; *b*) $A^{2011} = 0$, akkor A diagonalizálható?

9. Legyen K test, $\lambda \in K$, és M az az $n \times n$-es Jordan-blokk, melynek főátlójában λ, alatta, vele párhuzamosan csupa 1-es, a mátrix többi helyén pedig mindenütt nulla áll. Igazoljuk, hogy ha $f \in K[x]$, akkor az $f(M)$ mátrix elemei a következők: a főátló felett csupa nulla áll, és a főátlóval párhuzamos, a főátlótól lefelé számított k-adik „ferde sor” mindegyik eleme $f^{(k)}(\lambda)/k!$, ahol a $^{(k)}$ kitevő k-adik deriváltat jelöl ($0 \leq k \leq n-1$).

10. Határozzuk meg az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix Jordan-normálalakját, majd számítsuk ki a 2011-edik hatványát.

11. Jelölje $J_{\lambda,k}$ a $k \times k$-as, λ sajátértékhez tartozó Jordan-blokkot.

    a) Határozzuk meg $J_{\lambda,k}$ minimálpolinomját.

    b) Hogyan határozható meg egy mátrix (transzformáció) Jordan-normálalakjából a minimálpolinom?

    c) Igazoljuk, hogy egy (komplex elemű, négyzetes) mátrix minimálpolinomja pontosan akkor egyezik meg a karakterisztikus polinomjával, ha minden sajátértéke csak egy Jordan-blokkban fordul elő. Hány független sajátvektor tartozik ilyenkor egy-egy sajátértékhez?

    d) Adjunk új bizonyítást a Cayley-Hamilton-tételre komplex elemű mátrixok esetén.

12. Határozzuk meg $J_{\lambda,k}$ négyzetének a Jordan-normálalakját.

13. Mi a Jordan-normálalakja egy Jordan-blokk transzponáltjának? Mutassuk meg, hogy minden $M \in M_n(\mathbb{C})$ mátrix hasonló a transzponáltjához.

14. *a*) Melyek azok a $k \times k$-as mátrixok, amelyek felcserélhetőek $J_{\lambda,k}$-val?

    b) Tegyük föl, hogy az $M \in \mathbb{C}^{k\times k}$ mátrix Jordan-normálalakja egyetlen blokkból áll. Igazoljuk, hogy az M-mel felcserélhető mátrixok halmaza $\{p(M) \mid p \in \mathbb{C}[x]\}$.

    c)* Igazoljuk a fenti állítás megfelelőjét abban az általánosabb esetben, amikor M minden sajátértéke csak egy Jordan-blokkban fordul elő.

    d)* És általában $\{A \in \mathbb{C}^{k\times k} \mid AM = MA\} =?$

15. Legyen $t \neq 0$, β pedig tetszőleges komplex szám. Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} \beta & & & & \\ t & \beta & & & \\ & t & \beta & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & t & \beta \end{pmatrix}$$

mátrix Jordan-normálalakját.