Bsc algebra1 gyakorlat

*Második zárthelyi **B** csoport (2021. december 7.) – eredmények és pontozás*

1. **a)** Az inverziók száma 9, ezért az előjel $-$ (1 pont). Ez abból is látszik, hogy a ciklusfelbontás (135264).

b) A keresett determináns $5^3 \cdot 2^2 = 500$. Az 5 vagy a 2 helyes kitevőjéért adható 1 pont, az $5^3 \cdot 2^2$ válasz maximális pontot ér.

c) A negyedik sor szerint kifejtve az eredmény 1. A kifejtési tétel helyes felírása 1 pont, a két 3×3-as determináns meghatározása 1-1 pont. Gauss-elimináció esetén helyes lépések számával arányos pontozás.

2. **a)** Az eredmény $2AA^T = \begin{pmatrix} 28 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. (1 pont)

b) Gauss-eliminációval számolva az eredmény $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. (3 pont)

c) A determináns 2 (1 pont), ezért a keresett elem $-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$ (1 pont).

3. **a)** A gyökök és együtthatók összefüggései szerint a gyökök szimmetrikus polinomjai $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$, $\sigma_2 = -\frac{3}{2}$, $\sigma_3 = -\frac{1}{2}$, $\sigma_4 = -\frac{1}{2}$ (1 pont). A négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \frac{13}{4}$, a reciprokösszeg $\frac{\sigma_3}{\sigma_4} = 1$ (1 pont).

b) A $2, 3, 5, 7, 11$ prímek jönnek szóba. Ezek közül az 5 osztója a főegyütthatónak, az x^2 együtthatója nem osztható 2-vel, az x együtthatója nem osztható 11-gyel. Ezért csak a $p = 3$ és a $p = 7$ jó. 1 pont akkor jár, ha a fenti öt prím közül legalább három esetében helyes a válasz.

c) $x^3 - 2x^2 + 3 = (3x^2 - 2x - 1)(x/3 - 4/9) + (-5x/9 + 23/9)$, tehát a maradék $-5x/9 + 23/9$ (2 pont). Ezt úgy is megkaphatjuk, hogy az $x^3 - 2x^2 + 3$ polinomba helyettesítjük az $x = 1$-et és $x = -1/3$-ot (ezek a $3x^2 - 2x - 1$ polinom gyökei) és a kapott értékekre illesztünk elsőfokú polinomot.

4. **a)** $x^{24} - 1 = \Phi_1(x)\Phi_3(x)\Phi_2(x)\Phi_6(x)\Phi_4(x)\Phi_{12}(x)\Phi_8(x)\Phi_{24}(x) = (x^{12} - 1)\Phi_8(x)\Phi_{24}(x)$ (1 pont). Másrészt $\Phi_8(x) = x^4 + 1$ (1 pont), ezért $\Phi_{24}(x) = \frac{x^{24}-1}{(x^{12}-1)(x^4+1)} = \frac{x^{12}+1}{x^4+1} = x^8 - x^4 + 1$ (1 pont). Alternatív megoldás: $6 \mid 24$ és 24 minden prímosztója osztója a 6-nak (1 pont), ezért $\Phi_{24}(x) = \Phi_6(x^{24/6})$ (1 pont). Viszont $\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$, ezért $\Phi_{24}(x) = \Phi_6(x^4) = x^8 - x^4 + 1$ (1 pont).

b) $\mathbb{Z}_2$-ben tagonként lehet négyzetre emelni (1 pont), ezért $x^{12} + x^8 + x^4 + 1 = (x^6 + x^4 + x^2 + 1)^2 = (x^3 + x^2 + x + 1)^4$. Az $x = 1$ gyök, ezért kiemelhetjük a gyöktényezőt: $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1) = (x + 1)^3$ (1 pont), tehát a helyes válasz $x^{12} + x^8 + x^4 + 1 = (x + 1)^{12}$ (1 pont).

5. (6 pont) Minden $j = 1, \ldots, n$-re vonjuk le a $(j+1)$-edik oszlop x_j-szeresét az első oszlopból. (2 pont) Eközben nem változik a determináns (1 pont), tehát

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}. \text{ (1 pont)}$$

Utóbbi felsőháromszögmátrix, ezért determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata (1 pont), tehát a keresett determináns $-\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$ (1 pont).

6. $5x^4 - 35x + 5 = 5 \cdot (x^4 - 7x + 1)$ (1 pont), ahol 5 prímszám, ezért irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben (1 pont). Másrészt $x^4 - 7x + 1$ is irreducibilis, mert 1 főegyütthatós és mod 2 irreducibilis, ezért ez a felbontás (4 pont).

Második megoldás a végére: A racionális gyökteszt szerint $x^4 - 7x + 1$-nek csak a ± 1 lehet gyöke, de egyik sem az (1 pont). Így $x^4 - 7x + 1$ csak két másodfokú egészegyütthatós polinom szorzatára bomolhatna, melyekről feltehetjük, hogy normáltak, hiszen $x^4 - 7x + 1$ főegyütthatója 1 (1 pont). Tegyük fel, hogy $x^4 - 7x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. A megfelelő együtthatókat összehasonlítva $bd = 1$, azaz $b = d = \pm 1$; $ad + bc = -7$; $ac + b + d = 0$ és $a + c = 0$ (1 pont). Az utolsó két egyenletből $a^2 = b + d = 2b = \pm 2$, ami ellentmondás, mert a ± 2 nem négyzetszám (1 pont).

7. A polinomnak mod 2 és mod 3 nincsen gyöke (1 pont). Másrészt vegyük észre, hogy $x^4 - x^2 + 1 = \Phi_{12}(x)$ (1 pont). Tehát az előadáson tanult tétel szerint ha $p \neq 2, 3$ prím és $p \mid \Phi_{12}(a)$ valamely $a \in \mathbb{Z}$-re, akkor $o_p(a) = 12$, speciálisan $12 \mid p - 1$ (1 pont). Viszont ekkor $x^{12} - 1 \mid x^{p-1} - 1$ (1 pont), de utóbbi különböző gyöktényezők szorzata modulo p (hiszen $\mathbb{Z}_p$-ben $x^{p-1} - 1 = \prod_{j=1}^{p-1}(x - j)$) (1 pont), így $\Phi_{12}(x) \mid x^{12} - 1 \mid x^{p-1} - 1$ is különböző gyöktényezők szorzatára bomlik (1 pont).

Második megoldás a végére: Az most is kell, hogy $o_p(a) = 12$. Belátjuk, hogy $(j, 12) = 1$ esetén $\Phi_{12}(x) \mid \Phi_{12}(x^j)$. Ehhez elég ellenőrizni, hogy minden ε primitív 12-edik egységgyökre $\Phi_{12}(\varepsilon^j) = 0$. Node ha $(j, 12) = 1$, akkor ε^j is primitív 12-edik egységgyök, ezért $\Phi_{12}(\varepsilon^j) = 0$ (1 pont). Tehát ha $p \mid \Phi_{12}(a)$, akkor $p \mid \Phi_{12}(a) \mid \Phi_{12}(a^j)$ (1 pont). Node a, a^5, a^7, a^{11} páronként inkongruensek modulo p (hiszen $o_p(a) = 12$), ezért ez négy különböző gyöke Φ_{12}-nek $\mathbb{Z}_p$-ben, speciálisan gyöktényezők szorzatára bomlik (1 pont).