

Bsc algebra1 gyakorlat

Második zárthelyi B csoport (2021. december 7.)

Mind a hét feladatban **indoklás szükséges**, a pusztá eredményért nem jár pont. Az **első három feladat mindegyikéből legalább 4 pontot** kell szerezni, különben az eredmény elégtelen. Ha ez sikerült, akkor a ZH jegye az összpontszám hatoda. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. Kérjük, hogy a **szerző nevét és NEPTUN-kódját, valamint a gyakorlatvezető nevét minden lapra OLVASHATÓ** nyomtatott betűkkel írják fel.

1. (1 + 2 + 3 pont)

a) Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ permutáció előjelét.

b) Egy 3×3 -as A mátrix determinánása 2. Mennyi lesz $5AA^T$ determinánása?

c) Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix determinánását.

2. (1 + 3 + 2 pont)

a) Számítsuk ki a $2AA^T$ mátrixot, ahol $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ inverzét.

c) Írjuk fel a $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ inverzében a második sor harmadik elemét.

3. (2 + 2 + 2 pont)

a) Határozzuk meg a $2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1$ polinom gyökeinek négyzetösszegét és reciprokösszegét.

b) Mely p prímekre teljesíti a Schönemann-Eisenstein kritérium feltételét a $5x^7 - 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7x^4 + 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11x^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7x + 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ polinom?

c) Mi lesz a maradék, ha az $x^3 - 2x^2 + 3$ polinomot maradékosan osztjuk a $3x^2 - 2x - 1$ polinommal?

4. (3 + 3 pont)

a) Számítsuk ki a $\Phi_{24}(x)$ körosztási polinomot.

b) Bontsuk \mathbb{Z}_2 fölött irreducibilisek szorzatára az $x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ polinomot.

5. (6 pont) Számítsuk ki az alábbi determinánst:
$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
. Az $n = 2$ és $n = 3$ esetekért

1-1 pont jár.

6. (6 pont) Bontsuk irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}[x]$ -ben az $5x^4 - 35x + 5$ polinomot.

7. (6 pont) Igazoljuk, hogy ha az $x^4 - x^2 + 1$ polinomnak van gyöke \mathbb{Z}_p -ben (p prím), akkor különböző gyöktényezők szorzatára is bomlik.