Bsc algebra1 gyakorlat

*Második zárthelyi **A** csoport (2021. december 7.) – eredmények és pontozás*

1. a) Az inverziók száma 8, ezért az előjel + (1 pont). Ez abból is látszik, hogy a ciklusfelbontás (125)(346).

b) A keresett determináns $2^3 \cdot 7^2 = 392$. A 2 vagy a 7 helyes kitevőjéért adható 1 pont, a $2^3 \cdot 7^2$ válasz maximális pontot ér.

c) A negyedik sor szerint kifejtve az eredmény 10. A kifejtési tétel helyes felírása 1 pont, a két 3×3-as determináns meghatározása 1-1 pont. Gauss-elimináció esetén helyes lépések számával arányos pontozás.

2. a) Az eredmény $2A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{pmatrix}$. (1 pont)

b) Gauss-eliminációval számolva az eredmény $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 pont)

c) A determináns 2 (1 pont), ezért a keresett elem $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1$ (1 pont).

3. a) A gyökök és együtthatók összefüggései szerint a gyökök szimmetrikus polinomjai $\sigma_1 = \frac{1}{3}$, $\sigma_2 = \frac{2}{3}$, $\sigma_3 = \frac{1}{3}$, $\sigma_4 = \frac{1}{3}$ (1 pont). A négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -\frac{11}{9}$, a reciprokösszeg $\frac{\sigma_3}{\sigma_4} = 1$ (1 pont).

b) A $2, 3, 5, 7, 11$ prímek jönnek szóba. Ezek közül a 7 osztója a főegyütthatónak, az x^2 együtthatója nem osztható 2-vel, az x együtthatója nem osztható 11-gyel, 3^2 pedig osztója a konstans tagnak. Ezért csak a $p = 5$ jó. 1 pont akkor jár, ha a fenti öt prím közül legalább három esetében helyes a válasz.

c) $x^3+3x^2+2 = (2x^2-x-1)(x/2+7/4)+(9x/4+15/4)$, tehát a maradék $9x/4+15/4$ (2 pont). Ezt úgy is megkaphatjuk, hogy az $x^3 + 3x^2 + 2$ polinomba helyettesítjük az $x = 1$-et és $x = -1/2$-et (ezek a $2x^2 - x - 1$ polinom gyökei) és a kapott értékekre illesztünk elsőfokú polinomot.

4. a) $x^{54} - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)\Phi_6(x)\Phi_9(x)\Phi_{18}(x)\Phi_{27}(x)\Phi_{54}(x) = (x^{18} - 1)\Phi_{27}(x)\Phi_{54}(x)$ (1 pont). Másrészt $\Phi_{27}(x) = x^{18}+x^9+1$ (mivel 27 prímhatvány) (1 pont), ezért $\Phi_{54}(x) = \frac{x^{54}-1}{(x^{18}-1)(x^{18}+x^9+1)} = \frac{x^{36}+x^{18}+1}{x^{18}+x^9+1} = x^{18} - x^9 + 1$ (1 pont). Alternatív megoldás: $6 \mid 54$ és 54 minden prímosztója osztója a 6-nak (1 pont), ezért $\Phi_{54}(x) = \Phi_6(x^{54/6})$ (1 pont). Viszont $\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$, ezért $\Phi_{54}(x) = \Phi_6(x^9) = x^{18} - x^9 + 1$ (1 pont).

b) $\mathbb{Z}_2$-ben tagonként lehet négyzetre emelni (1 pont), ezért $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)^2$. Az $x = 1$ gyök, ezért kiemelhetjük a gyöktényezőt: $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1) = (x + 1)^3$ (1 pont), tehát a helyes válasz $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = (x + 1)^6$ (1 pont).

5. (6 pont) Minden $j = 1, \ldots, n$-re vonjuk le a $(j+1)$-edik oszlop x_j-szeresét az első oszlopból. (2 pont) Eközben nem változik a determináns (1 pont), tehát

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}. \text{ (1 pont)}$$

Utóbbi felsőháromszögmátrix, ezért determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata (1 pont), tehát a keresett determináns $-\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$ (1 pont).

6. $7x^4 - 35x + 7 = 7 \cdot (x^4 - 5x + 1)$ (1 pont), ahol 7 prímszám, ezért irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben (1 pont). Másrészt $x^4 - 5x + 1$ is irreducibilis, mert 1 főegyütthatós és mod 2 irreducibilis, ezért ez a felbontás (4 pont).

Második megoldás: A racionális gyökteszt szerint $x^4 - 5x + 1$-nek csak a ± 1 lehet gyöke, de egyik sem az (1 pont). Így $x^4 - 5x + 1$ csak két másodfokú egészegyütthatós polinom szorzatára bomolhatna, melyekről feltehetjük, hogy normáltak, hiszen $x^4 - 5x + 1$ főegyütthatója 1 (1 pont). Tegyük fel, hogy $x^4 - 5x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. A megfelelő együtthatókat összehasonlítva $bd = 1$, azaz $b = d = \pm 1$; $ad + bc = -5$; $ac + b + d = 0$ és $a + c = 0$ (1 pont). Az utolsó két egyenletből $a^2 = b + d = 2b = \pm 2$, ami ellentmondás, mert a ± 2 nem négyzetszám (1 pont).

7. A polinomnak mod 2 és mod 3 nincsen gyöke (1 pont). Másrészt vegyük észre, hogy $x^4 - x^2 + 1 = \Phi_{12}(x)$ (1 pont). Tehát az előadáson tanult tétel szerint ha $p \neq 2, 3$ prím és $p \mid \Phi_{12}(a)$ valamely $a \in \mathbb{Z}$-re, akkor $o_p(a) = 12$, speciálisan $12 \mid p - 1$ (1 pont). Viszont ekkor $x^{12} - 1 \mid x^{p-1} - 1$ (1 pont), de utóbbi különböző gyöktényezők szorzata modulo p (hiszen $\mathbb{Z}_p$-ben $x^{p-1} - 1 = \prod_{j=1}^{p-1}(x - j)$) (1 pont), így $\Phi_{12}(x) \mid x^{12} - 1 \mid x^{p-1} - 1$ is különböző gyöktényezők szorzatára bomlik (1 pont).

Második megoldás a végére: Az most is kell, hogy $o_p(a) = 12$. Belátjuk, hogy $(j, 12) = 1$ esetén $\Phi_{12}(x) \mid \Phi_{12}(x^j)$. Ehhez elég ellenőrizni, hogy minden ε primitív 12-edik egységgyökre $\Phi_{12}(\varepsilon^j) = 0$. Node ha $(j, 12) = 1$, akkor ε^j is primitív 12-edik egységgyök, ezért $\Phi_{12}(\varepsilon^j) = 0$ (1 pont). Tehát ha $p \mid \Phi_{12}(a)$, akkor $p \mid \Phi_{12}(a) \mid \Phi_{12}(a^j)$ (1 pont). Node a, a^5, a^7, a^{11} páronként inkongruensek modulo p (hiszen $o_p(a) = 12$), ezért ez négy különböző gyöke Φ_{12}-nek $\mathbb{Z}_p$-ben, speciálisan gyöktényezők szorzatára bomlik (1 pont).