Bsc algebra1 gyakorlat

*Második zárthelyi **A** csoport (2021. december 7.)*

Mind a hét feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Az **első három feladat mindegyikéből legalább** 4 **pontot** kell szerezni, különben az eredmény elégtelen. Ha ez sikerült, akkor a ZH jegye az összpontszám hatoda. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. Kérjük, hogy a **szerző nevét és NEPTUN-kódját, valamint a gyakorlatvezető nevét minden lapra** OLVASHATÓ nyomtatott betűkkel írják fel.

1. $(1+2+3$ pont$)$

a) Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ permutáció előjelét.

b) Egy 3×3-as A mátrix determinánsa 7. Mennyi lesz $2AA^T$ determinánsa?

c) Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát.

2. $(1+3+2$ pont$)$

a) Számítsuk ki a $2A^TA$ mátrixot, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ inverzét.

c) Írjuk fel a $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ inverzében az első sor harmadik elemét.

3. $(2+2+2$ pont$)$

a) Határozzuk meg a $3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$ polinom gyökeinek négyzetösszegét és reciprokösszegét.

b) Mely p prímekre teljesíti a Schönemann-Eisenstein kritérium feltételét a $7x^7 - 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^2 x^4 + 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 x^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7x + 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ polinom?

c) Mi lesz a maradék, ha az $x^3 + 3x^2 + 2$ polinomot maradékosan osztjuk a $2x^2 - x - 1$ polinommal?

4. $(3+3$ pont$)$

a) Számítsuk ki a $\Phi_{54}(x)$ körosztási polinomot.

b) Bontsuk $\mathbb{Z}_2$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^6 + x^4 + x^2 + 1$ polinomot.

5. (6 pont) Számítsuk ki az alábbi determinánst: $\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Az $n = 2$ és $n = 3$ esetekért 1-1 pont jár.

6. (6 pont) Bontsuk irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}[x]$-ben az $7x^4 - 35x + 7$ polinomot.

7. (6 pont) Igazoljuk, hogy ha az $x^4 - x^2 + 1$ polinomnak van gyöke $\mathbb{Z}_p$-ben (p prím), akkor különböző gyöktényezők szorzatára is bomlik.