Bsc algebra1 gyakorlat

*Első zárthelyi **B** csoport (2021. október 19.) – eredmények és pontozás*

1. **a)** A racionális gyökteszt szerint a lehetséges gyökök: ± 1, ± 3, $\pm 1/2$, $\pm 3/2$, $\pm 1/4$, $\pm 3/4$ (1 pont). Pozitív gyök nincs, mert a polinom minden együtthatója pozitív (1 pont). Behelyettesítve látjuk, hogy a -3 (1 pont) és a $-1/2$ gyök (1 pont), utóbbi kétszeres.

b) A feltétel miatt $f(x) = (x+2)^3 g(x)$ alakú, ahol $g(-2) \neq 0$ (1 pont). Így $(x^2-4)f(x) + f(x)^2 = (x+2)^4((x-2)g(x) + (x+2)^2 g(x)^2)$, ahol $(-2-2)g(-2) + (-2+2)g(-2)^2) = -4g(-2) \neq 0$, azaz a kérdéses polinomnak pontosan négyszeres gyöke a -2 (1 pont).

2. **a)** A nevező konjugáltjával bővítve, majd 13-mal egyszerűsítve a hányados $(-1/2) + (1/2)i$, abszolút értéke $\sqrt{2}/2$. (1 pont)

b) A jobb oldal valós, ezért a bal oldal is az, tehát $w = \overline{w} \in \mathbb{R}$ (1 pont). Így $\mathrm{Re}(-w-3i) = -w$, azaz $w = -w+4$, tehát $w = 2$ (1 pont).

c) A megoldóképletből a négyzetgyök alatti szám $8i + 15$ (1 pont), négyzetgyöke $\pm(4+i)$ (1 pont), a megoldások $1 - i$ és $-3 - 2i$ (1 pont).

3. **a)** A szám trigonometrikus alakja: $2\sqrt{5}(\cos(150^\circ) + i\sin(150^\circ))$ (1 pont). A három köbgyök: $\sqrt[6]{20}(\cos(50^\circ) + i\sin(50^\circ))$ (első síknegyed); $\sqrt[6]{20}(\cos(170^\circ) + i\sin(170^\circ))$ (második síknegyed); $\sqrt[6]{20}(\cos(290^\circ) + i\sin(290^\circ)) = \sqrt[6]{20}(\cos(-70^\circ) + i\sin(-70^\circ))$ (negyedik síknegyed) (1 pont).

b) $196/360 = 49/90$, ahol $(49, 90) = 1$, azaz a rend 90 (1 pont).

c) Gauß-eliminációval számolva $(x, y, z) = (-2z, 1 - 2z, z)$ az általános megoldás egy lehetséges paraméterezése (3 pont).

4. Legyen $z = x + yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor az egyenlet $\sqrt{x^2 + y^2} = -x - y$ alakú (1 pont). Speciálisan $-x - y \geq 0$ (1 pont). Négyzetre emelve és rendezve $2xy = 0$ adódik (2 pont), azaz $x = 0$ vagy $y = 0$ (1 pont). Tehát a megoldás két, origóból induló félegyenes uniója: ha $x = 0$, akkor $y \leq 0$, ha pedig $y = 0$, akkor $x \leq 0$ (1 pont).

5. Gauß-eliminálva az

$$\begin{aligned} ax_3 &= 0 \\ (b-a^2)x_2 - abx_3 &= 0 \\ x_1 + \qquad ax_2 + \ bx_3 &= 0 \end{aligned}$$

adódik (1 pont). Ha $a = b = 0$, akkor nyilván csak az $x_1 = 0$ lehet megoldás (1 pont). Ha $a = 0$, de $b \neq 0$, akkor az $(x_1, x_2, x_3) = (b, 0, -1)$ megoldás és itt $x_1 = b \neq 0$ (1 pont). Legyen tehát $a \neq 0$. Ekkor az első egyenletből $x_3 = 0$ adódik, a harmadikból pedig akkor lesz $x_1 = -ax_2$ nemnulla, ha $x_2 \neq 0$ (1 pont). A középső egyenletből pedig $x_2 \neq 0$ megoldás pontosan akkor létezik, ha $b - a^2 = 0$ (1 pont). Összefoglalva: pontosan akkor van $x_1 \neq 0$ megoldás, ha $a = 0 \neq b$ vagy $b = a^2 \neq 0$ (1 pont).

6. Ha w rendje végtelen (azaz w nem egységgyök), akkor ηw rendje is végtelen, azaz egyenlők (1 pont). Legyen tehát $w = \cos(2\pi\frac{k}{n}) + i\sin(2\pi\frac{k}{n})$, (ahol $(k, n) = 1$,) így $\eta w = \cos(2\pi(\frac{k}{n} + \frac{2}{5})) + i\sin(2\pi(\frac{k}{n} + \frac{2}{5}))$ (1 pont). A két törtet összeadva a kérdés az, hogy milyen $\frac{k}{n}$ (egyszerűsített) racionális számokra lesz $\frac{5k+2n}{5n}$ egyszerűsített alakjában n a nevező (2 pont). Ez azzal ekvivalens, hogy $(5k + 2n, 5n) = 5$, azaz szükségképpen $5 \mid n$ (1 pont).

Mivel $(k,n)=1$, 5-től különböző prímosztója nem lehet $(5k+2n,5n)$-nek, így az kell, hogy $25\nmid(5k+2n,5n)$, azaz $k\not\equiv-\frac{2n}{5}\pmod 5$ (1 pont). Összefoglalva: azon w komplex számok felelnek meg, melyeknek a rendje végtelen vagy $w=\cos(2\pi\frac{k}{n})+i\sin(2\pi\frac{k}{n})$, ahol $(k,n)=1$ egészek, $5\mid n$ és $5\nmid k+\frac{2n}{5}$.

7. Legyen $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, ekkor $T(v)=vz+1$ (1 pont). Ezért ha T-t n-szer alkalmazzuk, akkor (a Horner-elrendezés alapján) $vz^n+z^{n-1}+\cdots+z+1$ adódik (1 pont). A mértani sor összegképletét is felhasználva ez akkor egyenlő v-vel, ha $(z^n-1)/(z-1)=v(1-z^n)$. Innen $z^n=1$ vagy $v=1/(1-z)$, feltéve, hogy $z\neq1$ (2 pont). Ezért az alábbi lehetőségek vannak. Ha $z=1$ (vagyis $\alpha=k360°$), akkor egyik pont sem lesz periodikus. Ha $z\neq1$, de z egységgyök (vagyis α fokokban mérve racionális szög), akkor minden pont periodikus lesz (1 pont). A fennmaradó esetben $v=1/(1-z)$ az egyetlen periodikus pont, ez már egy lépésben visszatér önmagába, vagyis T-nek fixpontja (1 pont).