Bsc algebra1 gyakorlat

*Első zárthelyi **A** csoport (2021. október 19.) – eredmények és pontozás*

1. **a)** A racionális gyökteszt szerint a lehetséges gyökök: ± 1, ± 2, ± 4, $\pm 1/3$, $\pm 2/3$, $\pm 4/3$ (1 pont). Pozitív gyök nincs, mert a polinom minden együtthatója pozitív (1 pont). Behelyettesítve látjuk, hogy a -2 (1 pont) és a $-1/3$ gyök (1 pont), előbbi kétszeres.

b) A feltétel miatt $f(x) = (x-3)^2 g(x)$ alakú, ahol $g(3) \neq 0$ (1 pont). Így $(x^2-9)f(x) + f(x)^2 = (x-3)^3((x+3)g(x)+(x-3)g(x)^2)$, ahol $(3+3)g(3)+(3-3)g(3)^2) = 6g(3) \neq 0$, azaz a kérdéses polinomnak pontosan háromszoros gyöke a 3 (1 pont).

2. **a)** A nevező konjugáltjával bővítve, majd 13-mal egyszerűsítve a hányados $(1/2) + (1/2)i$, abszolút értéke $\sqrt{2}/2$. (1 pont)

b) A jobb oldal valós, ezért a bal oldal is az, tehát $z = \overline{z} \in \mathbb{R}$ (1 pont). Így $z + 7$ valós, azaz $\mathrm{Im}(z+7) = 0$, tehát $z = 3$ (1 pont).

c) A megoldóképletből a négyzetgyök alatti szám $8i + 15$ (1 pont), négyzetgyöke $\pm(4+i)$ (1 pont), a megoldások $1 + 2i$ és $-3 + i$ (1 pont).

3. **a)** A szám trigonometrikus alakja: $2\sqrt{2}(\cos(-30°) + i\sin(-30°))$ (1 pont). A három köbgyök: $\sqrt{2}(\cos(-10°) + i\sin(-10°)) = \sqrt{2}(\cos(350°) + i\sin(350°))$ (negyedik síknegyed); $\sqrt{2}(\cos(110°) + i\sin(110°))$ (második síknegyed); $\sqrt{2}(\cos(230°) + i\sin(230°)) = \sqrt{2}(\cos(-130°) + i\sin(-130°))$ (harmadik síknegyed) (1 pont).

b) $228/360 = 19/30$, ahol $(19, 30) = 1$, azaz a rend 30 (1 pont).

c) Gauß-eliminációval számolva $(x, y, z) = (-z, -1-3z, z)$ az általános megoldás egy lehetséges paraméterezése (3 pont).

4. Legyen $z = x + yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor az egyenlet $\sqrt{x^2+y^2} = x - y$ alakú (1 pont). Speciálisan $x - y \geq 0$ (1 pont). Négyzetre emelve és rendezve $2xy = 0$ adódik (2 pont), azaz $x = 0$ vagy $y = 0$ (1 pont). Tehát a megoldás két, origóból induló félegyenes uniója: ha $x = 0$, akkor $y \leq 0$, ha pedig $y = 0$, akkor $x \geq 0$ (1 pont).

5. Gauß-eliminálva az

$$\begin{aligned} ax_3 &= 0 \\ (b-a^2)x_2 - abx_3 &= 0 \\ x_1 + \quad ax_2 + \quad bx_3 &= 0 \end{aligned}$$

adódik (1 pont). Ha $a = b = 0$, akkor nyilván csak az $x_1 = 0$ lehet megoldás (1 pont). Ha $a = 0$, de $b \neq 0$, akkor az $(x_1, x_2, x_3) = (b, 0, -1)$ megoldás és itt $x_1 = b \neq 0$ (1 pont). Legyen tehát $a \neq 0$. Ekkor az első egyenletből $x_3 = 0$ adódik, a harmadikból pedig akkor lesz $x_1 = -ax_2$ nemnulla, ha $x_2 \neq 0$ (1 pont). A középső egyenletből pedig $x_2 \neq 0$ megoldás pontosan akkor létezik, ha $b - a^2 = 0$ (1 pont). Összefoglalva: pontosan akkor van $x_1 \neq 0$ megoldás, ha $a = 0 \neq b$ vagy $b = a^2 \neq 0$ (1 pont).

6. Ha z rendje végtelen (azaz z nem egységgyök), akkor εz rendje is végtelen, azaz egyenlők (1 pont). Legyen tehát $z = \cos(2\pi\frac{k}{n}) + i\sin(2\pi\frac{k}{n})$, (ahol $(k, n) = 1$,) így $\varepsilon z = \cos(2\pi(\frac{k}{n} + \frac{1}{5})) + i\sin(2\pi(\frac{k}{n} + \frac{1}{5}))$ (1 pont). A két törtet összeadva a kérdés az, hogy milyen $\frac{k}{n}$ (egyszerűsített) racionális számokra lesz $\frac{5k+n}{5n}$ egyszerűsített alakjában n a nevező (2 pont). Ez azzal ekvivalens, hogy $(5k+n, 5n) = 5$, azaz szükségképpen $5 \mid n$ (1 pont). Mivel $(k, n) = 1$, 5-től különböző prímosztója nem lehet $(5k+n, 5n)$-nek, így az kell, hogy $25 \nmid (5k+n, 5n)$, azaz

$k \not\equiv -\frac{n}{5} \pmod 5$ (1 pont). Összefoglalva: azon z komplex számok felelnek meg, melyeknek a rendje végtelen vagy $z = \cos(2\pi\frac{k}{n}) + i\sin(2\pi\frac{k}{n})$, ahol $(k,n) = 1$ egészek, $5 \mid n$ és $5 \nmid k + \frac{n}{5}$.

7. Legyen $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, ekkor $T(v) = vz+1$ (1 pont). Ezért ha T-t n-szer alkalmazzuk, akkor (a Horner-elrendezés alapján) $vz^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1$ adódik (1 pont). A mértani sor összegképletét is felhasználva ez akkor egyenlő v-vel, ha $(z^n-1)/(z-1) = v(1-z^n)$. Innen $z^n = 1$ vagy $v = 1/(1-z)$, feltéve, hogy $z \neq 1$ (2 pont). Ezért az alábbi lehetőségek vannak. Ha $z = 1$ (vagyis $\alpha = k360°$), akkor egyik pont sem lesz periodikus. Ha $z \neq 1$, de z egységgyök (vagyis α fokokban mérve racionális szög), akkor minden pont periodikus lesz (1 pont). A fennmaradó esetben $v = 1/(1-z)$ az egyetlen periodikus pont, ez már egy lépésben visszatér önmagába, vagyis T-nek fixpontja (1 pont).