Bsc algebra1 gyakorlat

Kilencedik és tizedik előadás-dia

1. ***(3.2.16)*** Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$-mal.

2. ***(3.2.23)*** Mi a maradék, ha x^4+x^2+1-et osztjuk x^2+x+1-gyel? Az eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is, majd vizsgáljuk meg, hogy $x^{2n}+x^n+1$ mikor osztható x^2+x+1-gyel.

3. ***(3.2.24)*** Mi a maradék, ha $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$-et osztjuk $x^2 + 1$-gyel, illetve $x^2 - 1$-gyel?

4. Az $f(x) : (x^2 + 1)$ maradékos osztásnál a maradék $x + 1$. Határozzuk meg $f(i)$ értékét.

5. ***(3.2.17)*** Állapítsuk meg az $f(x) = 3x^3+6x^2+6x+3$ és a $g(x) = 2x^4+2x^2+2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal.

6. Mi lesz $x^5 + 1$ és $x^{15} - 1$ legnagyobb közös osztója?

7. ***(3.3.15)*** Mi lesz $x^n - 1$ és $x^m - 1$ legnagyobb közös osztója?

---

8. ***(3.1.29)*** Igaz-e a $2x \mid 3x^2$ oszthatóság rendre a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölötti polinomok körében?

9. ***(3.3.14)*** Bontsuk $6(x^2 - 2)(x^2 + 1)$-et $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára.

10. Bontsuk a $2x^4 - 4$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}$ és $\mathbb{R}$ fölött.

11. Bontsuk az $x^{12} - 4096$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben.

---

12. ***(3.5.4)*** A Schönemann-Eisenstein kritérium az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül: $x^{11} + 2x + 18$, $x^{11} + 2x + 12$, $x^{11} + 12x + 5$, $x^{11} + n$ (mely n-ekre?).

13. ***(3.5.5)*** Legyen f racionális együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha valamelyik eltoltja (vagyis az $f(x+c)$ polinom, ahol $c \in \mathbb{Q}$) irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Igazoljuk ennek segítségével, hogy $x^4 + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

14. ***(3.5.10)*** Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x^4 + x + 1$ polinom?

15. ***(3.5.11*)*** Legyen p egy prímszám, $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n \geq 1$, és $0 < k < n$. Legyen $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

(1) Ha f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött.
(2) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.
(3) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.
(4) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.
(5) Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ fölött k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.
(6) Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy $\overline{f}$ foka n.

16. ***(3.5.6)*** A $6x^4 + 3x + 1$ polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.

17. Bontsuk $x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 2x + 1$-et irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}$ fölött.

18. ***(3.5.14)*** Irreducibilis-e $\mathbb{Z}$ fölött $x^5 + 5x + 26$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^6 + 1$, $x^3 + 7x - 3$, $x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$?

19. ***(3.5.15*)*** Irreducibilisek-e az alábbi polinomok a $\mathbb{Q}$ test fölött? $3x^7-6x^6+6x^2+3x-2$, $3x^7+x^6+6x^2+2x-2$, $3x^7-6x^6+6x^2+2x-2$, $x^{16}+1$, $x^{16}+2$, x^4-14x^2+9, x^4-x^2+1, $3x^7+6x-18$, x^5+4, x^3+9, x^5+729, $x^{10}-x^5+1$, $x^{20}+20$, x^4+25, x^6+32, x^4+4x+1, x^4-2x+1, x^4+x^3+1, x^4+x^3+4, $x^4+x^3+x^2+1$.

20. ***(3.3.21)*** Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.

21. ***(3.9.22)*** Bontsuk az $x^{12}-1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ felett.

22. ***(3.5.9)*** Az x^4+x^2+x+1-et $\mathbb{Z}_2$ felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

---

23. ***(3.3.19)*** Irreducibilis-e x^4+4 illetve x^4+9 a $\mathbb{Q}$ fölött? Általánosítsunk!

24. ***(3.3.24**)*** Bontsuk fel x^4-10x^2+1-et $\mathbb{R}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára (segítség: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ fölötti felbontást is. Bizonyítsuk be, hogy ennek a polinomnak semelyik eltoltja sem teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.

25. ***(3.5.15**)*** Legyen p prím és $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$. Alkalmazható-e az $f(x+1)$ polinomra a Schönemann-Eisenstein?

26. ***(3.5.16**)*** Legyen $f(x,y)=x^9+x^3y^3+y^2+y\in\mathbb{C}[x,y]$, és jelölje $\mathbb{C}(y)$ a $g(y)/h(y)$ alakú racionális törtfüggvényekből álló testet ($g,h\in\mathbb{C}[y]$).

(1) Primitív-e f, mint $\mathbb{C}[y]$ fölötti polinom?
(2) Következik-e a Schönemann–Eisenstein-tételből, hogy f irreducibilis $\mathbb{C}(y)$ fölött?
(3) Irreducibilis-e f a $\mathbb{C}[x,y]$-ban?

27. ***(3.5.18**)*** Annak felhasználásával, hogy x^3-2 irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, mutassuk meg, hogy $\sqrt[3]{4}$ nem írható föl $a+b\sqrt[3]{2}$ alakban, ahol $a,b\in\mathbb{Q}$.

---

28. ***(A racionális gyökteszt kiegészítése*)*** Legyen p/q racionális gyöke az f egész együtthatós polinomnak, ahol $(p,q)=1$. Bizonyítsuk be, hogy $p-q\mid f(1)$ és $p+q\mid f(-1)$.

29. ***(*)*** Igazoljuk, hogy ha f egész együtthatós és $f(0), f(1)$ páratlan számok, akkor f-nek nincs egész gyöke.

30. ***(**)*** Mutassuk meg, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ fölött. Rajzoljuk le a Newton-poligonjukat is (alkalmas prímet használva). $6x^4+3x+1$, $x^5+3x^4+36x^2+54x+9$, x^7+32, $x^n+x^{n-1}+3$, $x^n+3x+27$, $6x^6+3x^4+8x^3+72$.

31. ***(**)*** Rajzoljuk le y^2+xy-x (mint y polinomjának) Newton-poligonját v_x-re nézve. Alkalmas n-re fejtsük $x^{1/n}$ hatványsorába az $y^2+xy-x=0$ egyenlet mindkét ($y_1(x)$, illetve $y_2(x)$) megoldását.