Bsc algebra1 gyakorlat

Hatodik és hetedik előadás-dia

1. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor, illetve az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, a felső háromszög alakra hozás módszerével, végül a 3×3-asokat a Sarrus-szabállyal is.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Oldjuk meg a Cramer-szabállyal az $x + y = 1$, $x + 2y = 2$ egyenletrendszert.

3. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Ha egy $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrixra $\det A = 5$, akkor mennyi $\det(A + A)$?

5. Egy 1222×1222-es determináns minden sora számtani sorozat. Mennyi az értéke?

6. Egy egész elemű determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.

7. Egy 3×3-as determináns egyjegyű számokból áll. Minden sorban a három számjegyből alkotott háromjegyű szám héttel osztható. Igazoljuk, hogy a determináns osztható héttel.

8. *(*)* Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.

9. *(*)* Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha $\det M \in \{1, -1\}$.

---

10. Hány inverzió van az alábbi permutációkban, illetve a 'hátulról előre' permutációban?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

11. Hány inverzió lehet maximum egy 5 elemű halmaz egy páratlan permutációjában?

12. *(4.2.33*)* Legyen G irányítatlan gráf az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazon. Tekintsük a gráf éleinek megfelelő cseréket. Mutassuk meg, hogy ezek segítségével akkor és csak akkor kapható meg minden permutáció, ha G összefüggő.

13. *(4.2.35**)* Tegyük fel, hogy k és t egynél nagyobb, relatív prím egészek. Az $1, 2, \dots, n$ számok $1, 2, \dots, n$ sorrendjéből kiindulva tetszőleges két olyan elemet fölcserélhetünk, amelyek különbsége k vagy t. Bizonyítsuk be, hogy ilyen lépések egymásutánjával akkor és csak akkor juthatunk el minden lehetséges sorrendhez, ha $k + t - 1 \le n$.

14. *(**)* 17 rab van egy börtönben. Mindegyikük homlokára egy egész számot ragasztanak úgy, hogy ezek páronként különbözők legyenek. Mindenki látja a többiek számát, de a sajátját nem. Egy adott jelre minden rab felemeli a bal- vagy a jobb kezét. Ezután ha mindannyian tudják a számok nagyság szerinti sorrendjét, akkor mindet elengedik – egyébként kivégzik őket. A rabok előzetesen összebeszélhetnek. Ki tudnak-e jutni a börtönből?

---

15. Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?

16. Az 5×5-ös $((a_{ij}))$ determináns második és harmadik oszlopa egyenlő. Az $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan?

17. *(*)* Legyen M egy 3×3-as valós mátrix, melyre $M^T = -M$. Mutassuk meg, hogy a determinánsa nulla. A 3 helyett milyen n egészekre lesz biztosan igaz az analóg állítás?

18. *(*)* Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-edrendű, komplex elemű determinánsban a_{ij} az a_{ji} konjugáltja minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós.

19. *(*)* Mely n-ekre van olyan $n\times n$-es mátrix, melynek elemei csak 0 és 1, és determinánsa 2?

20. *(**)* Egy determináns egyik kifejtési tagját tükrözzük a determináns mellékátlójára. Hogyan változik meg a megfelelő permutációban az inverziók száma?

---

21. *(**)* Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, és ε_j a $2\pi j/n$ szöghöz tartozó n-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1}).$$

22. *(**)* Legyen $p > 2$ prím, és tekintsük az $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{p-2}x^{p-2} \equiv 0 \pmod p$ kongruenciát, ahol $p \nmid a_0$. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor megoldható, ha

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \cdots & a_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod p.$$

23. *(*)* Legyen K test, $A \in K^{k\times k}$, $B \in K^{m\times m}$, $X \in K^{k\times m}$ és 0 az $m\times k$-as nullmátrix. Rakjuk össze az M mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen: $M := \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

24. *(**)* Legyenek A és B $n\times n$-es mátrixok a K test felett, E az $n\times n$-es egységmátrix, 0 pedig a nullmátrix. Az $\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & B \end{pmatrix}$ blokkmátrixot megfelelően Gauss-eliminálva adjunk új bizonyítást a determinánsok szorzástételére.

---

25. *(**)* Igazoljuk, hogy a vezéregyesek száma nem függ a Gauss-elimináció módjától.

26. *(**)* Igazoljuk, hogy ha M egy nilpotens mátrix (azaz valamelyik hatványa 0), akkor $E - M$ invertálható (itt E az egységmátrix).