Bsc algebra1 gyakorlat

Ötödik előadás-dia

1. Az AB, BA, BC, $CB-C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&7\\4&1\end{pmatrix},\quad C^T=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&3&8\end{pmatrix}.$$

2. Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehetséges: $A+A$, $A+B$, AB, AC, AC^T, DD^T, D^TD, $AC+2C$, $AD-3D$, D^2, BC, CB. Itt

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}.$$

3. Adjunk meg olyan 10×10-es $A\neq B$ mátrixokat és egy 10×100-as $C\neq 0$ mátrixot, amelyekre $AC=BC$ teljesül. Meg lehet-e adni az $A\neq B$ mátrixokat úgy is, hogy ez **minden** 10×100-as C-re teljesüljön?

4. Számítsuk ki az 5×5-ös $N=((n_{ij}))$ mátrix első öt hatványát, ahol $n_{ij}=1$, ha $i-j=1$, és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy $n\times n$-es $M=((m_{ij}))$ mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $m_{ij}=0$ ha $i\geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n=0$.

5. Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix, és hogy ezek részgyűrűt alkotnak. Mi áll a szorzat diagonálisában?

6. Ha $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}N=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, akkor mi az N mátrix második sorának harmadik eleme?

7. Adjuk meg azokat az $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixokat, melyekre $\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}A=A^T\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$.

8. ***(*)*** Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^n,\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}^n,\ \begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}^n,\ \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n.$$

9. Jelölje $E^{(ij)}$ azt a mátrixot, amelynek i-edik sorában a j-edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorzunk $E^{(ij)}$-vel? Van-e olyan 3×3-as A mátrix, amellyel a balszorzás tetszőleges 3×3-as X mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az X többi elemét pedig ellentettjére változtatja? Van-e ilyen A akkor, ha balszorzás helyett jobbról akarunk szorozni?

10. ***(*)*** Az M és N mátrixok **felcserélhetők,** ha $MN=NM$. Keressük meg az összes olyan háromszor hármas mátrixot, amely az $E^{(23)}$-mal felcserélhető (lásd az előző feladatot). Melyek azok az $n\times n$-es mátrixok, amelyek **minden** $n\times n$-es mátrixszal felcserélhetők?

11. ***(*)*** Mely mátrixokkal felcserélhetők ezek a mátixok: $\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix}$?

12. ***(**)*** Igazoljuk, hogy ha $M,N\in\mathbb{C}^{n\times n}$, akkor $MN-NM$ nem lehet az egységmátrix.

13. ***(*)*** Legyen $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Bizonyítsuk be, hogy $M^2-(a+d)M+(ad-bc)E=0$.

14. ***(**)*** Adjuk meg $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben az $X^2 = I$, $X^2 = -E$, $X^2 = 0$ és $X^2 = X$ egyenletek minél több megoldását!

---

15. Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Írjuk fel a harmadik és a negyedik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: invertálható mátrixok összege is invertálható.

17. Egy mátrix első két sorát megcseréljük. Hogyan változik meg az inverze?

18. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

(1) Ha az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása, akkor az $A\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása.
(2) Ha az $A\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása.
(3) Ha $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$, és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$-re létezik megoldása az $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ egyenletrendszernek is.
(4) Ha $A \in \mathbb{R}^{6\times 5}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^6$, és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^6$-ra létezik megoldása az $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ egyenletrendszernek is.

19. ***(5.11.1*)*** Igazoljuk, hogy $\mathbb{C}^{2\times 2}$-nek nemkommutatív részgyűrűjét alkotják a $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $z, w \in \mathbb{C}$. Bizonyítsuk be, hogy ez ferdetest, és keressünk benne (minél több) $\mathbb{C}$-vel izomorf résztestet.

---

20. ***(**)*** Legyen R egy kommutatív, egységelemes gyűrű.

(1) Bizonyítsuk be, hogy ha az $R[x]$ polinomgyűrű definíciójában a változó negatív kitevős hatványait is megengedjük (de összesen csak véges sok tagot), akkor egy gyűrűt kapunk. Ezt a gyűrűt a *Laurent-polinomok* gyűrűjének nevezik, és $R[x, x^{-1}]$-szel jelölik. Mik $K[x, x^{-1}]$ invertálható elemei, ha K test?
(2) Bizonyítsuk be, hogy ha a polinomok sorozatos definíciójában nem kötjük ki, hogy $a_n = 0$ minden elég nagy n-re, akkor is gyűrűt kapunk. Ennek neve a *formális hatványsorok* gyűrűje, jelölés: $R[[x]]$. Mik $K[[x]]$ invertálható elemei, ha K test?
(3) Bizonyítsuk be, hogy ha a polinomok sorozatos definíciójában nem kötjük ki, hogy $a_n = 0$ minden elég nagy n-re, és megengedünk *véges sok* negatív kitevőjű tagot is, akkor is gyűrűt kapunk. Ennek a gyűrűnek a neve a *formális Laurent-sorok* gyűrűje, jelölés: $R((x))$. Igazoljuk, hogy $K((x))$ test, ha K test.
(4) Gyűrűt kapunk-e, ha a polinomok definíciójánál végtelen sok negatív és végtelen sok pozitív kitevős tagot is megengedünk?

21. ***(5.1.32**)*** Ha egy egységelemes gyűrűben $1 - ab$ invertálható, akkor $1 - ba$ is.

22. ***(2.1.12**)*** Ha p prím és $S = \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{j^2}$, ahol ε primitív p-edik egységgyök, mennyi S^2?