Bsc algebra1 gyakorlat

Negyedik és ötödik előadás-dia

1. Mivel egyenlő i^{1919} és $1 + i + \ldots + i^{1919}$?

2. ***(1.5.22)*** Számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.

3. ***(1.5.15)*** Az 1, -1, i, $1+i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°) + i\sin(336°)$ számoknak mennyi a rendje? Melyek egységgyökök? Mely n-ekre lesznek ezek a számok n-edik egységgyökök? És primitív n-edik egységgyökök?

4. ***(1.5.18)*** Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $o(-i\varepsilon)$?

5. ***(1.5.17)*** Mutassuk meg, hogy ha $n > 0$ egész, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, és $\varepsilon^n = i$, akkor $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$.

6. ***(1.5.19)*** Ha ε rendje osztható néggyel, mi lesz $-\varepsilon$ rendje?

7. ***(1.5.20)*** Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?

8. ***(1.5.21)*** Legyenek m és n pozitív egészek. Mik $x^n = 1$ és $x^m = 1$ közös gyökei? Igazoljuk, hogy egy m-edik és egy n-edik egységgyök szorzata mn-edik egységgyök. Milyen (m, n) párokra lesz egy primitív n-edik és egy primitív m-edik egységgyök szorzata primitív mn-edik egységgyök? Hozzuk ki ebből, hogy az Euler-függvény multiplikatív.

9. ***(2.5.12)*** Mutassuk meg, hogy ha két n-edfokú polinom n helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők. Írjuk fel $x^n - 1$ gyöktényezős alakját.

10. ***(2.5.15*)*** Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.

---

11. Határozzuk meg Cardano képletének felhasználásával, hogy az $x^3 - 3px + 2$ egyenletnek mely p valós értékek esetében van 1, 2, illetve 3 valós gyöke.

12. ***(3.8.6*)*** Oldjuk meg: $x^3 - 6ix - i + 8 = 0$, $x^3 + 12x - 16i = 0$, $x^3 - 21x + 20 = 0$, $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0$.

13. ***(3.8.7*)*** Keressük meg az $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ polinom harmadfokú rezolvensének mindhárom gyökét. Hogyan változik f felbontása két másodfokú szorzatára, ha a rezolvensnek más-más gyökét használjuk?

14. ***(3.8.8**)*** Legyen $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$. Igazoljuk a következő állításokat.

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$.

(2) Az f harmadfokú rezolvense $g(x) = 8(x - u_1)(x - u_2)(x - u_3)$, ahol

$$u_1 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4)/2, \quad u_2 = (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4)/2, \quad u_3 = (\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)/2.$$

(3) Ha a megoldási eljárásban az $u = u_1$ gyököt használjuk, akkor az f másodfokúakra történő felbontásának tényezői $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ és $(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$ lesznek.

(4) $2u_1 - p = (\alpha_1 + \alpha_2)^2$.

(5) $q = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4)$.

(6) $u_1^2 - r = (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4)^2/4$.

(7) Ha $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 = 0$, akkor $u_1^2 - r = (\alpha_1 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2/4$.

15. *(**)* Igazoljuk, hogy az $x^4 + px^2 + qx + r$ polinomnak pontosan akkor van többszörös gyöke, amikor a harmadfokú rezolvensének.

---

16. Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek **általános** megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned}$$

HF:

$$\begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

17. Az alábbi táblázat celláiba írjunk be egy-egy megfelelő n ismeretlenes, m egyenletből álló (minél egyszerűbb) $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges), illetve N betűt, ha a megfelelő eset nem fordulhat elő.

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

18. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

$$\begin{aligned} -x + 3y + 3z &= 2 \\ 3x + y + z &= 4 \\ 2x - 2y + 3z &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x - y - 2z &= -7 \\ 3x + 2y - z &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x - y - 2z &= -7 \\ 3x + 2y - z &= 4 \end{aligned}$$

19. Mely valós c-re hány valós megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? A $c = 2$ esetben adjuk meg z értékét annál a megoldásnál, melynél az xy szorzat maximális:

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & & y & - & cz & = & -1 \\ x & + & cy & - & 2z & = & -1 \end{array}$$

20. Adott 1849 szám úgy, hogy közülük bármely 1848 összege 1849. Melyek ezek a számok?

21. *(*)* A

$$\begin{aligned} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerben a változók mely halmazai játszhatják a szabad változók szerepét?

22. *(*)* Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?

23. *(*)* Egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszernek az összes $\mathbb{R}$-beli megoldása racionális szám. Szükségképpen racionálisak-e az együtthatók? Hány megoldása lehet $\mathbb{C}$ felett?

24. *(*)* Vegyük egy lineáris egyenletrendszer összes lehetséges megoldásában előforduló x_1 értékek H halmazát. Bizonyítsuk be, hogy H vagy az üres halmaz, vagy egyelemű, vagy egyenlő a K testtel.