Bsc algebra1 gyakorlat

Első és második előadás-dia

Előadásjegyzet, feladatsorok, követelmények:

`https://zabradi.web.elte.hu/algebra1_2021-22o.html`

A K1.2.4 jelölés a Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába* ingyen letölthető könyvre utal, az így jelölt feladatok megoldásai is elérhetők a fenti honlapon. **Konzultáció** a hivatalos fogadóórákon kívül is kérhető emailben.

Gyakorlati jegy. A két **évfolyamzárthelyit** legalább **12 + 12** pontosra kell megírni; ha ez nem sikerül, akkor a gyakorlatvezető engedélye esetén a félév végén javító zárthelyit lehet írni. A gyakorlatokon írt **röpdolgozatokból** elért jó eredmény segít a gyakorlati jegy felfelé kerekítésében. Részletek, időpontok a fenti honlapon.

1. Számítsuk ki az alábbi összegeket és szorzatokat.

$$\sum_{j=6}^{9}(-1)^j\,, \qquad \sum_{2<j<5} 2j+1\,, \qquad \sum_{2<j<k<6} jk\,, \qquad \sum_{p\,<\,7 \text{ prím}} p^2\,, \qquad \prod_{1\le i\le 100000}(i-213)\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i\,, \qquad \prod_{i=1}^{n} 2^i\,, \qquad \sum_{i=0}^{n} q^i\,, \qquad (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}\,, \qquad \sum_{i=1}^{100}\sum_{j=1}^{20} ij - \sum_{j=1}^{20}\sum_{i=1}^{100} ij\,,$$

$$\sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}, \qquad \sum_{i=0}^{100}2^i\binom{100}{i}, \qquad \sum_{i=0}^{100}(-1)^i\binom{100}{i}, \qquad \sum_{i=0}^{50}\binom{100}{2i}, \qquad \sum_{i=0}^{50}\binom{101}{i}.$$

Írjuk föl a szumma jelölés segítségével $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k} b_j\right)$ beszorzott alakját.

2. Egyszerűsítsük: $\sqrt{8}\cdot\sqrt[4]{4}$; $\left(\sqrt[n-1]{x}\right)^{n^2-1}$; $(x^1)^2(x^2)^2\cdots(x^n)^2$; $x^{1^2}x^{2^2}\cdots x^{n^2}$. Nehezebb kérdés: fel tudjuk-e írni az utolsó képletben az x kitevőjét zárt alakban?

3. Oldjuk meg az $x^3+3x^2+3x+1=0$ és $x^3+3x^2+3x+2=0$ egyenleteket.

4. Alakítsuk szorzattá az a^3+b^3 kifejezést. Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}, \qquad \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}, \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}.$$

5. ***(K1.2.4)*** Alakítsuk szorzattá az $x^2-8x+15$ kifejezést. Adjuk meg az $u+v=8$, $uv=15$, majd az $u+v=14$, $uv=49$ egyenletrendszer **összes** valós megoldását.

6. ***(*)*** Alakítsuk szorzattá az x^4+4 kifejezést.

---

7. Végezzük el az alábbi műveleteket a polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát: $(x^3+3x^2+2)-(x^3+3x-4)$, $(x^2+2x+3)(x^2+3)$.

8. Mi lesz a 20-adfokú tag együtthatója a $(2x^{10}+x^5-1)(x^{20}+x^{15}-x^7+3x)$ polinomban?

9. Egy tizedfokú és egy n-edfokú polinom összege ötödfokú. Mik n lehetséges értékei?

10. ***(*)*** Igazoljuk, hogy $x\mapsto\sin(x)$, illetve $x\mapsto 1/x$ $(x\neq 0)$ nem polinomfüggvény.

---

11. Emeljük ki az $x-1$ gyöktényezőt az x^3-7x+6 polinomból, majd határozzuk meg az összes gyökét.

12. ***(2.4.14)*** A Horner-elrendezés segítségével döntsük el, hogy az $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel $f(x)$-et $(x-2)g(x) + f(2)$ alakban.

13. Iterált Hornerrel írjuk fel az $f(x) = 2x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 3x - 3$ polinomot $(x-1)$ polinomjaként, azaz keressük meg azt a $g(x)$ polinomot, melyre $f(x) = g(x-1)$.

14. ***(2.4.16)*** Az n-edfokú $f(x)$ polinomba behelyettesítjük a b számot. Hány szorzásra van szükség $f(b)$ kiszámításához, ha egyáltalán nem trükközünk; ha a b hatványait előre kiszámoljuk; ha a Horner-elrendezést használjuk?

15. ***(2.4.20*)*** Van-e olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$, melyre $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ és $f(18) = 520$?

16. ***(2.4.26*)*** Ha az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom négy különböző egész helyen is felveszi az 5 értéket, akkor felveheti-e egy egész helyen a 12-t?

---

17. ***(2.5.11)*** Hányszoros gyöke az $x^4 - x^3 - x + 1$ polinomnak az 1? (Iterált Horner). Határozzuk meg a deriváltjának a gyökeit is.

18. Adjunk példát olyan 1640 fokú polinomra, melynek az 1 pontosan tízszeres, a -1 pedig pontosan 20-szoros gyöke.

19. Ha az 1 (pontosan) ötszörös gyöke f-nek és hatszoros gyöke g-nek, akkor hányszoros gyöke $f+g$-nek, illetve $f+g+fg$-nek?

20. Igazoljuk, hogy $x^2 + bx + c$-nek pontosan akkor van kétszeres gyöke, ha $b^2 = 4c$.

21. Ha egy harmadfokú polinomnak van kétszeres gyöke, akkor hány (valós) gyöke van? Hány valós gyök lehet, ha a polinom negyedfokú?

22. ***(*)*** Mutassuk meg, hogy az $x^3 + px + q$ polinomnak akkor és csak akkor van legalább kétszeres gyöke, ha $27q^2 + 4p^3 = 0$.

23. ***(*)*** Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ polinomnak nincs többszörös gyöke.

24. ***(3.6.11**)*** Melyek azok a polinomok, amelyek oszthatók a deriváltjukkal?

---

25. ***(3.3.16)*** Adjuk meg a $2x^3 + 3x + 5$ polinom racionális gyökeit.

26. Határozzuk meg azt a c számot, melyre a $6x^4 + x^3 + 23x^2 + 4x + c$ polinomnak gyöke az 1/3, majd írjuk föl gyöktényezős alakban a kapott polinomot.

---

27. ***(*)*** Legyen $f(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$. Írjuk föl $f(x)/x^2$-et $x + (1/x)$ polinomjaként, majd keressük meg a gyökeit.

28. ***(*)*** Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ páros fokú polinom, amely „feje tetejére állítva is önmaga”, azaz $a_i = a_{n-i}$ minden $0 \le i \le n$ esetén, és $a_0 \ne 0$. Mutassuk meg, hogy $f(x)/x^{n/2}$ felírható $x + (1/x)$ polinomjaként.

29. ***(3.5.8*)*** Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$, ahol a_0 és a_n nem nulla, és $g(x) = a_n + a_{n-1}x + \ldots + a_0x^n$. Igazoljuk, hogy a g polinom $\mathbb{R}$-beli gyökei pontosan az f gyökeinek a reciprokai (multiplicitással számolva is).

---

30. ***(**)*** Legyenek $p_0, \ldots, p_{n-1}$ nemnegatív valós számok, nem mind nulla. Bizonyítsuk be, hogy a $z^n - p_{n-1}z^{n-1} - \cdots - p_1z - p_0 = 0$ egyenletnek pontosan egy pozitív gyöke van.

31. ***(**)*** Hány hárommal **nem** osztható együtthatója van az $(x+1)^{730}$ polinomnak?