Algebra1 Intenzív verzió

9–10. gyakorlat

2017. november 28 – december 6.

1. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(p/q) = 0$ ($p, q, \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$). Bizonyítsuk be, hogy p osztója f konstans tagjának, q pedig f főegyütthatójának.

2. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(p/q) = 0$ ($p, q, \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$). Bizonyítsuk be, hogy $p - q \mid f(1)$, $p + q \mid f(-1)$.

3. Igazoljuk, hogy ha $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $f(0), f(1)$ páratlan számok, akkor f-nek nincs egész gyöke.

4. Bontsuk $2x^3 + 3x + 5$-öt $\mathbb{Q}$ felett irreducibilisek szorzatára.

5. Mely c egész számokra irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett az $x^4 + c$ polinom? És mely racionális c-kre $\mathbb{Q}$ felett?

6. Bontsuk $x^4 - 10x^2 + 1$-et $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{F}_{11}$ felett irreducibilisek szorzatára.

7. Lehet-e egy $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{F}_2$ fölött irreducibilis polinomnak többszörös gyöke egy nagyobb testben? Igaz-e $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{F}_2$ fölött, hogy ha az f polinomra $(f, f') \neq 1$, akkor van olyan g irreducibilis polinom, hogy $g^2 \mid f$?

8. Legyen p egy prímszám, $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n > 1$, és $0 < k < n$. Legyen $\overline{f} \in \mathbb{F}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

   a) Ha f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött.

   b) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

   c) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

   d) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

   e) Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ fölött k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.

---

9. Mutassuk meg, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ fölött. Rajzoljuk le a Newton-poligonjukat is (alkalmas prímet használva). $6x^4 + 3x + 1$, $x^5 + 3x^4 + 36x^2 + 54x + 9$, $x^7 + 32$, $x^n + x^{n-1} + 3$, $x^n + 3x + 27$.

10. Irreducibilisek-e az alábbi polinomok a $\mathbb{Q}$ test fölött? $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 3x - 2$, $3x^7 + x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $x^{16} + 1$, $x^{16} + 2$, $x^4 - 14x^2 + 9$, $x^4 - x^2 + 1$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^5 + 4$, $x^3 + 9$, $x^5 + 729$, $x^{10} - x^5 + 1$, $x^{20} + 20$, $x^4 + 25$, $x^6 + 32$, $x^4 + 4x + 1$, $x^4 - 2x + 1$, $x^4 + x^3 + 1$, $x^4 + x^3 + 4$, $x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

11. Annak felhasználásával, hogy x^3-2 irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, mutassuk meg, hogy $\sqrt[3]{4}$ nem írható föl $a+b\sqrt[3]{2}$ alakban, ahol $a,b\in\mathbb{Q}$.

12. Legyen $f(x,y)=x^9+x^3y^3+y^2+y\in\mathbb{C}[x,y]$, és jelölje $\mathbb{C}(y)$ a $g(y)/h(y)$ alakú racionális törtfüggvényekből álló testet ($g,h\in\mathbb{C}[y]$).

    (a) Primitív-e f, mint $\mathbb{C}[y]$ fölötti polinom?

    (b) Következik-e a Schönemann-Eisenstein-tételből, hogy f irreducibilis $\mathbb{C}(y)$ fölött?

    (c) Irreducibilis-e f a $\mathbb{C}[x,y]$-ban?

13. Rajzoljuk le y^2+xy-x (mint y polinomjának) Newton-poligonját v_x-re nézve. Alkalmas n-re fejtsük $x^{1/n}$ hatványsorába az $y^2+xy-x=0$ egyenlet mindkét ($y_1(x)$, ill. $y_2(x)$) megoldását.

14. Bontsuk irreducibilis faktorokra az $(x+y+z)^k-x^k-y^k-z^k$ polinomot $k=3$ és $k=5$ esetén.

15. Igazoljuk, hogy ha $n>1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x)=\Phi_n(-x)$.

16. Határozzuk meg a Φ_n körosztási polinom együtthatóinak összegét.

17. Legyenek $m\mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x)=\Phi_m(x^{n/m})$. Számítsuk ki a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.

18. Mutassuk meg, hogy a prímhatvány indexű körosztási polinomok alkalmas eltoltjára teljesül a Schönemann-Eisenstein-kritérium feltétele, ami ebben a speciális esetben új bizonyítást ad az irreducibilitásra.

Nehezebb feladatok

19. Igazoljuk, hogy x^n+x+3 minden $n>1$ egész számra irreduciblis $\mathbb{Z}$ felett.

20. Legyen f egy n-edfokú egész együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy ha f helyettesítési értéke legalább $2n+1$ (különböző) helyen prímszám, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.

21. Van-e olyan $f\in\mathbb{Z}[x]$, hogy minden $g\in\mathbb{Z}[x]$ nem konstans polinomra az $f(g(x))$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött?

22. (Kombinatorikai nullhelytétel.) Tegyük fel, hogy a K test feletti $f\in K[x_1,\dots,x_n]$ polinom azonosan nulla az $S_1\times\dots S_n\subseteq K^n$ halmazon (ahol egyik S_i sem üres). Legyen $g_i(x_i)=\prod_{s\in S_i}(x_i-s)$. Mutassuk meg, hogy f felírható $\sum_{i=1}^n h_ig_i$ alakban, ahol mindegyik $h_i\in K[x_1,\dots,x_n]$ polinom foka legfeljebb $\deg(f)-\deg(g_i)$.

23. Legyen p prímszám és G egy hurokélmentes gráf, melyben minden pont foka legfeljebb $2p-1$, és a fokszámok átlaga nagyobb, mint $2p-2$. Igazoljuk, hogy G-nek van olyan nem üres részgráfja, ahol minden pont foka p.

24.* Igazoljuk, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{C}((x^{1/n}))$ egy algebrailag zárt test (azt is be kell látni, hogy test, de ez nem annyira nehéz).