Algebra1 Intenzív verzió

8. gyakorlat

2017. november 21-22.

1. Keressük meg azt az a értéket, melyre a $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix rangja a lehető legkisebb. Mennyi a rang a ezen értékére, és mennyi a rang a többi a értékekre?

2. Bizonyítsuk be, hogy egy $A \in K^{k\times n}$ mátrix rangja akkor és csak akkor 1, ha A egy k hosszúságú (nem nulla) sorvektor és egy n hosszúságú (nem nulla) oszlopvektor szorzataként áll elő.

---

3. Tegyük fel, hogy egy komplex együtthatós polinom minden valós (racionális) helyen valós (racionális) értéket vesz fel. Igazoljuk, hogy valós (racionális) együtthatós.

4. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{F}_p$ felett minden (egy- vagy többváltozós) függvény polinomfüggvény.

---

5. A $p = ix_1x_2x_3x_4^2 - x_1^2x_3^2 + 3x_1^3x_2 + \pi x_1^2x_2^3 + x_4 - x_1^2x_2^2x_3 + 2x_1^2x_2x_3x_4 - 6x_1^2x_2^2x_4$ polinomot bontsuk föl homogén polinomok összegére, ezeket rendezzük lexikografikusan, és állapítsuk meg a p^7 polinomban egyrészt a lexikografikusan legnagyobb tagot, másrészt a legnagyobb fokú tagok közül a lexikografikusan legnagyobb tagot.

6. Ha egy háromváltozós szimmetrikus polinom lexikografikusan legnagyobb tagja $x_1^2x_2^2x_3$, akkor lehet-e tagja $x_1x_2^3x_3$? Szerepelhet-e hatodfokú tag? Hány tag lehet legfeljebb? Amikor elemi szimmetrikusakkal írjuk föl, mi az eljárás első lépése?

7. Legyen $H(y_1, y_2, y_3) = 30y_1y_3^3 - y_2^5$. Helyettesítsük be mindegyik y_i helyére a megfelelő $\sigma_i(x_1, x_2, x_3)$ polinomot, és adjuk meg az eredmény egy nem nulla tagját.

8. Mutassuk meg, hogy nem létezik végtelen sok olyan egytagú $P_1, P_2, \dots \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom, melyekre $P_1 \succ P_2 \succ \dots$ teljesül.

9. Számítsuk ki a $2x^4 + 2x + 3$ polinom négy komplex gyökének összegét, szorzatát, négyzetösszegét, valamint e gyökök reciprokainak összegét.

10. Fejezzük ki elemi szimmetrikus polinomokkal a $\sum_{1\le i\ne j\le n} x_i^2x_j$ polinomot.

11. Határozzuk meg az $x^n + x + 1$ polinom (komplex) gyökeinek köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét ($n \ge 2$).

12. Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Írjuk föl azt a két harmadfokú normált polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a + b, a + c, b + c$.

13. Állítsuk elő s_4-et és s_5-öt elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

Nehezebb feladatok

14. Tegyük fel, hogy $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$ minden egész helyen egész értéket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy $n!a_n \in \mathbb{Z}$.

15. Igazoljuk, hogy $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$ akkor és csak akkor vesz fel minden egész helyen egész értéket, ha f az $f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i h_i(x)$ alakba írható, ahol $b_i \in \mathbb{Z}$ és $h_0(x) = 1$, $h_i(x) = \binom{x}{i} = \frac{x(x-1)\dots(x-i+1)}{i!}$ (ha $i \geq 1$). Az f ilyen felírása egyértelmű.

16. Legyen f egy egész együtthatós, normált polinom, melynek mindegyik komplex gyöke 1 abszolút értékű. Igazoljuk, hogy f mindegyik gyöke komplex egységgyök.