Algebra1 Intenzív verzió

7. gyakorlat

2017. november 14-15.

1. Az $(a_{ij})_{1 \le i,j \le 4}$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?

2. Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es determinánsban egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból áll, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.

3. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Számítsuk ki az alábbi (Vandermonde-féle) determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

5. Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor (létezik és) áll csupa egész számból, ha $\det M \in \{1, -1\}$.

6. Legyen K test, $M \in K^{n \times m}$, és $E_{ij} \in K^{n \times n}$ az a mátrix, amiben az i-edik sor j-edik eleme 1, a többi elem 0. Mutassuk meg az alábbiakat.

   (1) Az $E_{ij}M$ mátrix i-edik sora éppen az M mátrix j-edik sora, a többi sor pedig azonosan nulla.

   (2) Az $I + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj} = E_{ij} + E_{ji} + \sum_{k \ne i,j} E_{kk}$ mátrixszal való balszorzás felcseréli M-ben az i-edik és a j-edik sort.

   (3) Az $I + \lambda E_{ij}$-vel való balszorzás az M mátrix j-edik sorának λ-szorosát hozzáadja az i-edik sorhoz.

(4) Ha az egységmátrix főátlójának i-edik elemét 1-ről λ-ra változtatjuk, akkor az ezzel a mátrixszal való balszorzás az M mátrix i-edik sorát λ-szorosára változtatja.

Igazoljuk azt is, hogy balszorzás helyett jobbról szorozva a megfelelő $m \times m$-es mátrixokkal az oszlopokra vonatkozó analóg átalakításokat kapjuk.

7. Igazoljuk, hogy ha M egy nilpotens mátrix (azaz valamelyik hatványa 0), akkor $I - M$ invertálható (itt I az egységmátrix).

Nehezebb feladatok

8. Tegyük fel, hogy k és t egynél nagyobb, relatív prím egészek. Az $1, 2, \ldots, n$ számok $1, 2, \ldots, n$ sorrendjéből kiindulva tetszőleges két olyan elemet fölcserélhetünk, amelyek különbsége k vagy t. Bizonyítsuk be, hogy ilyen lépések egymásutánjával akkor és csak akkor juthatunk el minden lehetséges sorrendhez, ha $k + t - 1 \le n$.

9. 17 rab van egy börtönben. Mindegyiküknek a homlokára ragasztanak egy egész számot úgy, hogy ez a 17 szám páronként különböző legyen. Mindenki látja a többiek számát, de a sajátját nem. Egy adott jelre minden rab felemelheti a bal- vagy a jobb kezét. Ezután ha mind a 17-en tudják a számok nagyság szerinti sorrendjét, akkor mind a 17-etüket elengedik – egyébként kivégzik őket. A rabok előzetesen összebeszélhetnek. Ki tudnak-e jutni a börtönből?

10. Van-e olyan $123456789 \times 123456789$-es mátrix, melyben csak a 0 és 1 számok szerepelnek, és determinánsa 2?

11. Legyen $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, és ε_j a $2\pi j/n$ szöghöz tartozó n-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0) f(\varepsilon_1) \cdots f(\varepsilon_{n-1}).$$

12. Adjunk példát olyan R egységelemes gyűrűre és $r \in R$ elemre, melynek létezik balinverze, de nem létezik jobbinverze.

13. Legyen $p > 2$ prím, és tekintsük az $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-2} x^{p-2} \equiv 0 \pmod p$ kongruenciát, ahol $p \nmid a_0$. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor megoldható, ha

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \cdots & a_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod p.$$