

Algebra1 Intenzív verzió

6. gyakorlat

2017. november 7-8.

1. Írjuk fel az alábbi permutációk ciklusfelbontását:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 6 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix};$$

$$(35)(1432)(53)(1234); \quad (123)^{-1}; \quad (54321)(243)(12345).$$

2. Bizonyítsuk be, hogy $(12 \cdots k) = (21)(32) \cdots (k, k-1)$, illetve hogy $(12 \cdots k) = (1, k)(1, k-1) \cdots (12)$.
3. Hány különböző hatványa van az $f = (12)(34)(567)$ permutációnak? Mely n és k egész számokra lesz $f^k = f^n$?
4. Bizonyítsuk be, hogy ha $(x_1 x_2 \cdots x_k)$ egy tetszőleges ciklus az S_n csoportban, akkor $f(x_1 x_2 \cdots x_k) f^{-1} = (f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_k))$.
5. Rendezhetők-e a könyvek a könyvespolcon ha csak szomszédos könyvek cseréjét engedjük meg?
6. Adjuk meg az összes olyan $f \in S_n$ permutációt, amely felcserélhető az $(12 \cdots n)$ ciklussal.
7. Mutassuk meg, hogy egy permutáció akkor és csak akkor hatványa egy ciklusnak, ha diszjunkt ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos. (Az egy elemű ciklusokat nem írjuk ki.)
8. Igazoljuk, hogy S_n minden eleme előáll legfeljebb $n-1$ transzpozíció szorzataként. (*) Éles-e ez a határ?
9. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

10. Egy determináns egyik kifejtési tagját tükrözzük a determináns mellékátlójára. Hogyan változik meg a megfelelő permutációban az inverziók száma?

11. Egy 2011×2011 -es determináns minden sora számtani sorozat. Számítsuk ki a determinánst.
 12. Igazoljuk, hogy ha egy komplex elemű determinánsban $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ minden i, j -re, akkor a determináns értéke valós.
 13. Egy (egészegyütthatós) determinánsban minden oszlopösszeg osztható 7-tel. Bizonyítsuk be, hogy a determináns értéke is osztható 7-tel.
-

Nehezebb feladatok

14. a) Legyen K test, $A \in K^{k \times k}$, $B \in K^{m \times m}$, $X \in K^{k \times m}$ és 0 az $m \times k$ -as nullmátrix. Rakjuk össze az M mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen: $M := \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A) \det(B)$.
 - b) Legyen A és B most $n \times n$ -es K feletti mátrix, és I az $n \times n$ -es egységmátrix, 0 pedig a nullmátrix. Az $\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix}$ blokkmátrixot megfelelően Gauß-eliminálva adjunk új bizonyítást a determinánsok szorzástételére.
15. Igazoljuk, hogy a vezéregyesek száma nem függ a Gauß-elimináció módjától.