Algebra1 Intenzív verzió

5. gyakorlat

2017. október 10-18.

1. Jelölje F_α a síkon az origó körüli, pozitív irányú, α szögű forgatást, és T az $y = x$ egyenesre való tükrözést. Számítsuk ki az (x, y) pont képét ezeknél a transzformációknál, és adjunk meg olyan 2×2-es M_α, ill. M_T mátrixokat, melyekre $M_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_\alpha(x, y)$, ill. $M_T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(x, y)$. Tükrözés, illetve forgatás lesz-e $F_\alpha \circ F_\beta$, $F_\alpha \circ T$, $T \circ F_\alpha$?

2. Mely geometriai transzformációk felelnek meg az oszlopvektorok alábbi mátrixokkal balról való szorzásához? Adjuk meg ezek inverzét, ha létezik. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Végezzük el az alábbi szorzásokat: *a)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; *c)* $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok n-edik hatványát: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha u egy 1×2-es sorvektor, v pedig egy 2×1-es oszlopvektor, akkor $uv = |u||v| \cos\alpha$, ahol α az u, v vektorok által bezárt szög.

6. Legyen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ egy 2×2-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)I = 0$, ahol I az egységmátrix.

7. Adjuk meg $M_2(\mathbb{R})$-ben az $X^2 = I$, $X^2 = -I$, $X^2 = 0$ és $X^2 = X$ egyenletek minél több megoldását!

8. Az A és B mátrixok *felcserélhetők*, ha $AB = BA$. Melyek azok az $n \times n$-es mátrixok, amelyek minden más mátrixszal felcserélhetők? Először oldjuk meg a feladatot 2×2-es mátrixokra.

9. Milyen mátrixokkal felcserélhetők az alábbi mátrixok: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

10. Egy négyzetes mátrixot felső (alsó) háromszög-mátrixnak nevezünk, ha a főátló alatt (felett) az összes elem 0. Bizonyítsuk be, hogy az $n \times n$-es felső háromszög-mátrixok (a szokásos mátrix szorzással és összeadással) gyűrűt alkotnak!

11. Bizonyítsuk be, hogy ha M egy olyan $n \times n$-es felső háromszög-mátrix, aminek a főátlójában is csupa 0 van, akkor $M^n = 0$. Először lássuk be 2×2-es mátrixokra.

12. Igazoljuk, hogy ha $g \in G$ véges rendű elem a G csoportban, akkor $o(g^k) = \frac{o(g)}{(k, o(g))}$, ahol $o(\cdot)$ a rendet jelöli. Igazoljuk, hogy ha egy csoportban van d-edrendű elem ($1 < d \in \mathbb{Z}$), akkor van legalább $\varphi(d)$ darab d-edrendű elem is. (Itt $\varphi(d)$ a d-nél kisebb, d-hez relatív prím pozitív egészek számát jelöli.)

Nehezebb feladatok

13. Mely A és B $n \times n$-es (valós) mátrixokra teljesül $AB - BA = I$?

14. Igazoljuk, hogy $M_2(\mathbb{C})$-nek nemkommutatív részgyűrűjét alkotják a $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $z, w \in \mathbb{C}$. Mutassuk meg, hogy ez ferdetest, és keressünk benne (minél több) $\mathbb{C}$-vel izomorf résztestet.

---

15. Jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ az $a + b\sqrt{d}$ alakú számok részgyűrűjét $\mathbb{C}$-ben, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-ben végtelen sok invertálható elem van.

16. Jelölje $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ az $\{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ részgyűrűt $\mathbb{C}$-ben. Mikor izomorf $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$?

17. Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű, és tekintsük az $a+bi$ alakú formális kifejezéseket, ahol $a, b \in R$ (ezeket nevezhetnénk R fölötti komplex számoknak). A műveleteket ugyanúgy végezzük, mint a közönséges komplex számok esetén. Milyen p prímek esetén kapunk testet, ha $R = \mathbb{F}_p$?

18. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egységelemes gyűrűben $1 - ab$ invertálható, akkor $1 - ba$ is.

---

19. Legyen H részcsoport a G csoportban. Igazoljuk, hogy a H szerinti jobboldali mellékosztályok száma megegyezik a H szerinti baloldali mellékosztályok számával. Speciálisan ha az egyik véges, akkor a másik is.