Algebra1 Intenzív verzió

4. gyakorlat

2017. október 3-11.

1. Melyek azok a polinomok, amelyek oszthatók a deriváltjukkal?
2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között.
   a) $x^3 - 6ix - i + 8 = 0.$
   b) $x^3 + 12x - 16i = 0.$
   c) $x^3 - 21x + 20 = 0.$
   d) $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0.$
3. Keressük meg az $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ polinom harmadfokú rezolvensének mindhárom gyökét. Hogyan változik f felbontása két másodfokú szorzatára, ha a rezolvensnek más-más gyökét használjuk?
4. Igazoljuk, hogy az $x^4 + px^2 + qx + r$ polinomnak pontosan akkor van többszörös gyöke, amikor a harmadfokú rezolvensének.

---

5. A Gauß-elimináció (vagy a józan ész) segítségével oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket. Ugyanazok a megoldások adódnak-e, ha a valós, ill. ha a komplex számok körében keressük a megoldásokat?

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 & = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 & = 2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 & = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 & = 13 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 & = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 & = 3 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 & = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 & = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 & = 12 \end{cases}$$

6. Vegyük egy lineáris egyenletrendszer összes lehetséges megoldásában előforduló x_1 értékek H halmazát. Bizonyítsuk be, hogy H vagy az üres halmaz, vagy egyelemű, vagy egyenlő a K testtel.

7. A

$$\begin{aligned} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerben a változók mely halmazai játszhatják a szabad változók szerepét?

Nehezebb feladatok

8. Legyen $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$. Igazoljuk a következő állításokat.

   (i) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$.

   (ii) Az f harmadfokú rezolvense $g(x) = 8(x - u_1)(x - u_2)(x - u_3)$, ahol

   $$u_1 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4)/2, \quad u_2 = (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4)/2, \quad u_3 = (\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)/2.$$

   (iii) Ha a megoldási eljárásban az $u = u_1$ gyököt használjuk, akkor az f másodfokúakra történő felbontásának tényezői $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ és $(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$ lesznek.

   (iv) $2u_1 - p = (\alpha_1 + \alpha_2)^2$.

   (v) $q = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4)$.

   (vi) $u_1^2 - r = (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4)^2/4$.

   (vii) Ha $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 = 0$, akkor $u_1^2 - r = (\alpha_1 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2/4$.