Algebra1 Intenzív verzió

3. gyakorlat

2017. szeptember 26 - október 4.

1. A Horner-elrendezés segítségével döntsük el, hogy az $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel $f(x)$-et $(x-2)g(x) + f(2)$ alakban.
2. Hányszoros gyöke az $x^4 - x^3 - x + 1$ polinomnak az $x = 1$?
3. Határozzuk meg azt a c számot, melyre a $6x^4 + x^3 + 23x^2 + 4x + c$ polinomnak gyöke az $1/3$, majd írjuk föl gyöktényezős alakban a kapott polinomot.
4. Ha az 1 pontosan ötszörös gyöke f-nek és hatszoros gyöke g-nek, akkor hányszoros gyöke $f+g$-nek, illetve $f+g+fg$-nek?
5. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ polinomnak nincs többszörös gyöke.
6. Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot a $2x^2 + 2x - 3$ polinommal.
7. Egy $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom $x-1$-gyel osztva 2-t, $x-2$-vel osztva 1-et ad maradékul. Mennyi a maradék $(x-1)(x-2)$-vel osztva?
8. Osszuk el maradékosan az $(x \sin\alpha + \cos\alpha)^n$ polinomot az x^2+1 polinommal. Mi lesz a maradék?
9. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{C}[x]$-ben teljesül $(x^n - 1, x^k - 1) = x^{(n,k)} - 1$. Bizonyítsuk be, hogy $(a^n - 1, a^k - 1) = a^{(n,k)} - 1$ az egész számok körében, ahol $a > 1$ egész szám. Mi a kapcsolat a két állítás között?
10. Mutassuk meg, hogy véges test nem lehet algebrailag zárt.
11. Van-e olyan egész együtthatós f polinom, melyre $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ és $f(18) = 520$?
12. Ha az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom négy különböző egész helyen is felveszi az 5 értéket, akkor felveheti-e egy egész helyen a 12-t?

Nehezebb feladatok

13. Igazoljuk, hogy az $x \mapsto \sin x$ és az $x \mapsto 1/x$ függvény nem polinomfüggvény.
14. Hány 3-mal *nem* osztható együtthatója van az $(x+1)^{730}$ polinomnak?
15. Mutassuk meg, hogy az $x^3 + px + q$ polinomnak pontosan akkor van többszörös gyöke, ha $4p^3 + 27q^2 = 0$.

16. Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ olyan (páros fokú) polinom, mely a „feje tetejére állítva is önmaga”, azaz $a_i = a_{2n-i}$ minden $0 \leq i \leq n$ esetén és $a_0 \neq 0$. Mutassuk meg, hogy $f(x)x^{-n}$ felírható $x + 1/x$ polinomjaként.

17. Legyenek $p_0, \ldots, p_{n-1} \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} p_k > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a $z^n - p_{n-1}z^{n-1} - \cdots - p_1z - p_0 = 0$ egyenletnek pontosan egy pozitív gyöke van.

18. Legyen z_0 a $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ ($a_k \in \mathbb{C}$) polinom gyöke. Bizonyítsuk be, hogy $|z_0| \leq \zeta$, ahol ζ a $z^n - |a_{n-1}|z^{n-1} - \cdots - |a_0|$ polinom egyetlen pozitív zérushelyét jelöli.

19. Legyen $0 < p_n < p_{n-1} < \cdots < p_0$. Bizonyítsuk be, hogy a $p_nz^n + \cdots + p_1z + p_0$ polinomnak nincsen gyöke a $|z| \leq 1$ egységkörlapon.