Algebra1 Intenzív verzió

2. gyakorlat

2017. szeptember 19-27.

1. Fejezzük ki $\cos x$ és $\sin x$ segítségével $\sin 7x$-et. Általánosítsunk.
2. Mennyi az n-edik egységgyökök szorzata? És a négyzetösszege?
3. Milyen összefüggés van ε és $-\varepsilon$ rendje között?
4. Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $-i\varepsilon$ rendje?
5. Igazoljuk, hogy ha $\varepsilon^n = i$ valamely $\varepsilon \in \mathbb{C}$ komplex számra és $n > 0$ egészre, akkor ε rendje véges és osztható 4-gyel.
6. Szorozzuk össze a negyedik egységgyököket a hatodik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?
7. Legyenek m és n pozitív egészek.
   a) Hány közös gyöke van az $x^n = 1$ és az $x^m = 1$ egyenletnek?
   b) Igazoljuk, hogy egy m-edik és egy n-edik egységgyök szorzata mindig mn-edik egységgyök.
   c) Milyen m és n párra lesz egy primitív n-edik és egy primitív m-edik egységgyök szorzata primitív mn-edik egységgyök?
8. Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.

---

9. Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e?
   a) $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
   b) Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza a pontonkénti összeadásra és szorzásra.
   c) Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza a pontonkénti összeadásra és a kompozícióra, mint szorzásra.
   d) Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés. (Két halmaz szimmetrikus differenciája azokból az elemekből áll, amelyek a két halmaz közül pontosan egyben vannak benne.)
   e) A 3-dimenziós tér vektorai az összeadásra és a (i) skaláris (ii) vektoriális szorzásra nézve.

Nehezebb feladatok

10. Lefedhető-e a 100×100-as sakktábla 8×1-es dominókkal?

11. Legyen p egy prímszám és $S = \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{j^2}$, ahol ε primitív p-edik egységgyök. Mennyi S^2?

---

12. Legyen R egy kommutatív, egységelemes gyűrű.

    a) Bizonyítsuk be, hogy ha az $R[x]$ polinomgyűrű definíciójában a változó negatív kitevős hatványait is megengedjük (de összesen csak véges sok tagot), akkor egy gyűrűt kapunk. Ezt a gyűrűt a Laurent-polinomok gyűrűjének nevezik, és $R[x, x^{-1}]$-szel jelölik. Mik $K[x, x^{-1}]$ invertálható elemei, ha K test?

    b) Bizonyítsuk be, hogy ha a polinomok sorozatos definíciójában nem kötjük ki, hogy $a_n = 0$ minden elég nagy n-re, akkor is gyűrűt kapunk. Ennek a gyűrűnek a neve a formális hatványsorok gyűrűje, jelölés: $R[[x]]$. Mik $K[[x]]$ invertálható elemei, ha K test?

    c) Bizonyítsuk be, hogy ha a polinomok sorozatos definíciójában nem kötjük ki, hogy $a_n = 0$ minden elég nagy n-re, és megengedünk *véges sok* negatív kitevőjű tagot is, akkor is gyűrűt kapunk. Ennek a gyűrűnek a neve a formális Laurent-sorok gyűrűje, jelölés: $R((x))$. Igazoljuk, hogy $K((x))$ test, ha K test.

    d) Gyűrűt kapunk-e, ha a polinomok definíciójánál végtelen sok negatív és végtelen sok pozitív kitevős tagot is megengedünk?

13. Bizonyítsuk be, hogy egy legalább kételemű, véges, nullosztómentes gyűrű ferdetest.