Algebra1 Intenzív verzió

1. gyakorlat

2017. szeptember 12-13.

1. Végezzük el az alábbi műveleteket: $(1+i)/(3-2i)$, $|\overline{(4+i)}/(4+i)|$, $(1+i)^{2015}$.
2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között: $x = (3+2i)\overline{x}$, $x = 2\mathrm{Re}(x)$, $x^2 + 2ix - 1 = 0$.
3. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakban: $1-i$, $-1-\sqrt{3}i$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$, $\sin\alpha + i\cos\alpha$, $(1+i\tan\alpha)/(1-i\tan\alpha)$.
4. Határozzuk meg azokat a $c+di$ számokat, melyek négyzete $20i-21$. Oldjuk meg az $x^2 + (i-2)x + (6-6i) = 0$ egyenletet.
5. Milyen geometriai alakzatot írnak le a sík alábbi részhalmazai: $\{z\colon \mathrm{Re}(z+2i) \leq -2\}$, $\{z\colon \mathrm{Re}(z+1) \geq \mathrm{Im}(z-3i)\}$, $\{z\colon |z-i-1| \leq 3\}$, $\{z\colon |z-3+2i| = |z+4-i|\}$, $\{z\colon z+\overline{z} = -1\}$, $\{z\colon 2z+5 = 2\overline{z}\}$, $\{z\colon 1/z = \overline{z}\}$, $\{z\colon 1/z+8 = \overline{z}\}$, $\{z\colon |z| = iz\}$, $\{z\colon \mathrm{Im}((z-1)/(z+1)) = 0\}$, $\{z\colon \mathrm{Re}((z-1)/(z+1)) = 0\}$?
6. A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései: $z \mapsto 3z+2$, $z \mapsto (1+i)z$, $z \mapsto 1/\overline{z}$.
7. Igazoljuk, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege megegyezik az átlóinak a négyzetösszegével.
8. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta} = \sin\theta + i\cos\theta,$$
és így
$$\left(1+\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\right)^5 + i\left(1+\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}\right)^5 = 0.$$
9. Bizonyítsuk be, hogy
$$4\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10} = 1.$$
10. Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.
11. Hozzuk zárt alakra a $\sum_{m=0}^{\infty}\binom{2015}{4m}$ összeget.

Nehezebb feladatok

12. Mutassuk meg, hogy a z_1, z_2, z_3, z_4 páronként különböző komplex számok akkor és csak akkor vannak egy körön vagy egy egyenesen, ha kettősviszonyuk, azaz a

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Big/ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

kifejezés valós szám.

13. Az

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0)$$

függvényeket törtlineáris függvényeknek nevezzük. Ez az egyetlen ∞ szimbólummal kiegészített számsíkon (vagy ha úgy tetszik a komplex számgömbön) is értelmezhető (hogyan?).

a) Igazoljuk, hogy a fenti f függvény akkor és csak akkor képezi a komplex egységkört saját magára úgy, hogy a kör belseje a kör belsejére képződik, ha felírható a következő alakban:

$$f(z) = k \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (|k| = 1, |\alpha| < 1).$$

b) Keressünk olyan törtlineáris függvényt, amely az egységkörvonalat a valós tengelyre, belsejét a felső félsíkra képezi.

c) Igazoljuk, hogy kör képe is, egyenes képe is egyenes vagy kör lesz minden törtlineáris leképezésnél.

14. Legyen a $A \neq B$ két pont a síkon. Legyen C_λ azon P pontok mértani helye a síkon, melyekre $PA/PB = \lambda$, ahol λ egy pozitív valós szám. Bizonyítsuk be, hogy C_λ egy kör, ha $\lambda \neq 1$, és határozzuk meg a középpontját és a sugarát. Mi a helyzet, ha $\lambda = 1$?

15. Legyen C_λ az előző feladatban szereplő kör. Bizonyítsuk be, hogy C_λ merőleges minden A-t és B-t összekötő egyenesre és körre.