Algebra1 Intenzív verzió

2. ZH – megoldások

2017. december 11.

1. A diszjunkt ciklusokra való felbontás: $(1234)(345)(124) = (13)(254)$. Ez egy páratlan permutáció, melynek rendje $6 = [2, 3]$.

2. A $\sum_{1\le i\ne j\le n} x_i^3x_j$ polinomban a lexikografikusan legnagyobb tag $x_1^3x_2$, ezért az első lépésben levonjuk $\sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-0} = \sigma_1^2\sigma_2$-t. Itt
$$\sigma_1^2\sigma_2 = (x_1 + \cdots + x_n)^2(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n) = (s_2 - 2\sigma_2)\sigma_2 = \\ = \sum_{1\le i\ne j\le n} x_i^3x_j + \sum_{1\le j<k\le n}\ \sum_{1\le i\le n, j\ne i\ne k} x_i^2x_jx_k - 2\sigma_2^2$$
A középső összeadandóban $x_1^2x_2x_3$ a lexikografikusan legnagyobb tag, amit $\sigma_1\sigma_3$-mal tudunk kiejteni. Viszont $\sigma_1\sigma_3 = \sum_{1\le j<k\le n}\sum_{1\le i\le n,j\ne i\ne k} x_i^2x_jx_k + 4\sigma_4$ (hiszen pl. $x_1x_2x_3x_4$ pontosan 4-szer szerepel $\sigma_1\sigma_3$-ban: mind a 4 változó származhat σ_1-ből). **Így a végeredmény:** $\sum_{1\le i\ne j\le n} x_i^3x_j = \sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3 + 4\sigma_4$**.**

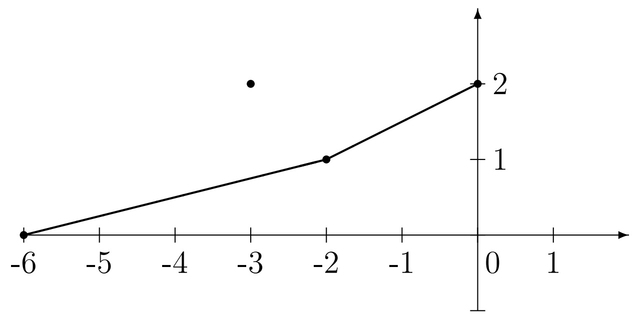
3. Mivel a polinom 3-fokú $\mathbb{F}_3$ felett, ezért x^3 együtthatója ± 1. Továbbá f pontosan akkor irreducibilis, ha $-f$ is az, ezért elég megszámolnunk az 1-főegyütthatósokat. Továbbá a konstans tag sem lehet 0, hiszen akkor x-et ki tudnánk emelni, ezért az is ± 1. Itt is feltehetjük, hogy a konstans tag is 1, mert $f(x)$ pontosan akkor irreducibilis, ha $-f(-x)$ is az, és utóbbinak ugyanaz a főegyütthatója, a konstans tag viszont előjelet vált (majd a végén persze szorzunk 2-vel). Ezt a 9 polinomot már végignézzük egyesével: ha egy harmadfokú polinomnak nincs gyöke, akkor irreducibilis. Az x^2 együtthatója lehet 0 vagy ± 1. Ha 0, akkor $x^3 + 1$-nek gyöke a -1, $x^3 + x + 1$-nek gyöke az 1, az $x^3 - x + 1$ pedigg irreducibilis. Ha x^2 együtthatója 1, akkor $x^3 + x^2 + 1$-nek gyöke az 1, $x^3 + x^2 + x + 1$-nek gyöke a -1, az $x^3 + x^2 - x + 1$ pedig irreducibilis. Végül $x^3 - x^2 - x + 1$-nek gyöke ± 1, a másik kettő ($x^3 - x^2 + 1$ és $x^3 - x^2 + x + 1$) pedig irreducibilis. **Összesítve 1-főegyüttható 1 konstans tagú polinomból 4-et találtunk, ezért $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ harmadfokú irreducibilis polinom van $\mathbb{F}_3$ fölött.**

4. Ha $f(a) = b$, akkor $f(x) = (x - a)g(x) + b$ alakú, ahol $g(x)$ is egész együtthatós, hiszen $x-a$-val lehet $\mathbb{Z}[x]$-ben maradékosan osztani, mert invertálható a főegyütthatója. Továbbá $c = f(b) = (b - a)g(b) + b$ miatt $c - b = (b - a)g(b)$, azaz $b - a \mid c - b$, hiszen $g(b)$ egész. Hasonlóan (az a, b, c-t megpermutálva) $c - b \mid a - c$ és $a - c \mid b - a$ is adódik. Így ezen különbségek asszociáltak, ami ellentmondás, hiszen a, b, és c páronként különbözőek, ezért különbségeik közt lesz egy legnagyobb abszolútértékű, ami nem lehet osztója a másik kettő különbségnek.

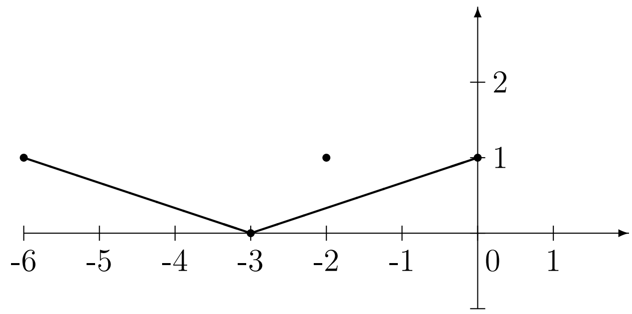
5. Vizsgáljuk meg a két polinom közös gyökeit. Ha $\Phi_n(\varepsilon^2) = 0$, akkor ε^2 primitív n-edik egységgyök. Ha $3 \mid n$, akkor $(\varepsilon^6)^{n/3} = (\varepsilon^2)^n = 1$, azaz ε^6 nem lehet primitív n-edik egységgyök, hiszen $n/3$-adik egységgyök. Ez esetben tehát nincs közös gyök, azaz a legnagyobb közös osztó 1. Másrészt ha $3 \nmid n$, akkor ha ε^2 primitív n-edik egységgyök, akkor ε^6 is az. Tehát ekkor $\Phi_n(x^2) \mid \Phi_n(x^6)$, így a legnagyobb közös osztó $\Phi_n(x^2)$. Végül ha ε primitív $2n$-edik egységgyök, akkor ε^2 egy primitív n-edik egységgyök, azaz gyöke Φ_n-nek. Speciálisan $\Phi_{2n}(x) \mid \Phi_n(x^2)$. Ha n páros, akkor $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$, azaz $\Phi_{2n}(x)$ és $\Phi_n(x^2)$ foka megegyezik, sőt, a főegyütthatója mindkettőnek 1, ezért ekkor $\Phi_n(x^2) = \Phi_{2n}(x)$ irreducibilis. Ha

viszont n páratlan és ε primitív n-edik egységgyök, akkor ε^2 is primitív n-edik egységgyök, azaz $\Phi_n(x) \mid \Phi_n(x^2)$. Viszont $\Phi_n(x)$ és $\Phi_{2n}(x)$ relatív prímek (mindkettő irreducibilis és különbözők), ezért páratlan n esetén $\Phi_n(x)\Phi_{2n}(x) \mid \Phi_n(x^2)$. A fokokat és főegyütthatókat ismét összehasonlítva $\Phi_n(x^2) = \Phi_n(x)\Phi_{2n}(x)$ felbontás adódik. **Összefoglalva: ha $3 \mid n$ akkor a keresett legnagyobb közös osztó 1; ha $3 \nmid n$, de $2 \mid n$, akkor a legnagyobb közös osztó $\Phi_{2n}(x)$, ha pedig $3 \nmid n$ és $2 \nmid n$, akkor $\Phi_n(x)\Phi_{2n}(x)$.**

6. A racionális gyökteszt segítségével kereshetünk gyököt. Ha rögtön felírjuk $p = 2$-re és $p = 3$-ra a Newton-poligont, akkor látszik az is, hogy ha van racionális gyök, akkor annak se a számlálója se a nevezője nem osztható se 2-vel se 3-mal. Ezeket kombinálva csak a ± 1 lehet gyök, és az 1 valóban gyök. Kiemelve a gyöktényezőt:
$$3x^7 - 3x^6 + 4x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 12x - 12 = (x-1)(3x^6 + 4x^3 + 6x^2 + 12)\ .$$
A második tényező Newton-poligonja $p = 2$ prímmel



Ebből az következik, hogy a polinomot $\mathbb{Q}$ fölött csak egy másodfokú és egy 4-edfokú szorzatára lehet bontani, ha nem irreducibilis. A $p = 3$ prímmel pedig



a Newton-poligon, amiből az következik, hogy csak két 3-fokú szorzatára bomolhat a polinom. A fentieket összevetve azt kapjuk, hogy $3x^6 + 4x^3 + 6x^2 + 12$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

7. Szorozzuk meg a mátrixunkat jobbról az $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$ blokkmátrixszal, ahol I_n az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BD^{-1} \\ C & I_k \end{pmatrix}$. Utóbbi szorzat determinánsát oszlopokon végzett Gauß-eliminációval számítjuk ki: a jobb alsó sarokban levő I_k egységmátrixban levő vezéregyesek segítségével a bal alsó C minden elemét kinullázzuk. A mátrixszorzás szabályai szerint ekkor a Gauß-elmináció végén az $\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$ mátrixot kapjuk, melynek determinánsa $\det(A - BD^{-1}C)\det I_k = \det(A - BD^{-1}C)$. Az állítás innen már következik a determinánsok szorzástételéből.