

# Algebra1 Intenzív verzió

1. ZH

2017. november 6.

A maximális pontszám minden feladatra 10 pont. A ZH jegye a pontszám tizedének egész-része. Használni egy, kézzel írott  $A_4$ -es lapot lehet – viszont semmi mást (pl. számológépet, mobiltelefont) nem. A rendelkezésre álló idő 120 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Fejezzük ki  $z$  és  $w$  segítségével annak a két szabályos ötszögnek a középpontját, melyeknek két szomszédos csúcsát a  $z$  és  $w$  komplex számok alkotják.
2. Határozzuk meg azon  $c$  komplex számokat, melyekre az  $(x-c)^3 + 3(x-c)^2 + c$  polinomnak van többszörös gyöke és ezen esetekben adjuk is meg a gyököket.
3. A  $t$  (valós) paraméter mely értékeire lesz az alábbi egyenletrendszernek megoldása? Mikor egyértelmű a megoldás? Adjuk is meg a megoldásokat a legáltalánosabb formában.

$$\begin{aligned}x + y + z &= t \\tx + 2z &= 3 \\3x + ty + 5z &= 7\end{aligned}$$

4. Mely  $n$ -ekre létezik olyan  $n \times n$ -es mátrix, melynek minden eleme  $\pm 7$ , és a négyzete 0? Amilyen  $n$ -re létezik, adjunk is meg ilyen  $n \times n$ -es mátrixot.
5. Mely  $n, k, l$  pozitív egész számokra lesz osztható az  $x^n + x^k + x^l$  polinom az  $x^2 - x + 1$  polinommal? Hány polinom állhat elő osztási maradékként?
6. Mely  $0 \neq z$  komplex számokra lesz a  $z\varepsilon, z\varepsilon^2, z\varepsilon^3, z\varepsilon^4, z^2\varepsilon, z^2\varepsilon^2, z^2\varepsilon^3, z^2\varepsilon^4$  számok rendje mind egyenlő, ahol  $\varepsilon$  primitív ötödik egységgyök?
7. Egy  $T$  transzformáció a síkon először  $\alpha$  szöggel forgat az origó körül, majd az  $x$  tengely irányába jobbra eltol 1-gyel. Egy pontot a síkon hívunk periodikusnak, ha van olyan  $n > 0$  egész, melyre a  $T$  transzformációt  $n$ -szer alkalmazva a pont önmagába megy. Milyen alakzatot alkothatnak a periodikus pontok? Adjunk is példát minden felmerülő esetre.