Algebra1 Intenzív verzió

2. ZH – megoldások

2015. december 8.

1. A Sarrus-szabállyal számolva a determinánsra $r^3 - 4r + 2 + r - 4(r+2) = r^3 - 7r - 6$ adódik. A racionális gyökteszt segítségével ennek a gyökei: -2, -1 és 3.

2. Az $x = 1$ gyök, ezért kiemeljük az $(x-1)$ gyöktényezőt: $x^5 + x^4 + 1 = (x-1)(x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$. A negyedfokúnak még mindig gyöke az $x = 1$, ezért kiemelhetjük ismét az $(x-1)$ gyöktényezőt: $x^5 + x^4 + 1 = (x-1)^2(x^3 - x + 1)$. Az $x^3 - x + 1$ viszont irreducibilis, hiszen nincsen gyöke.

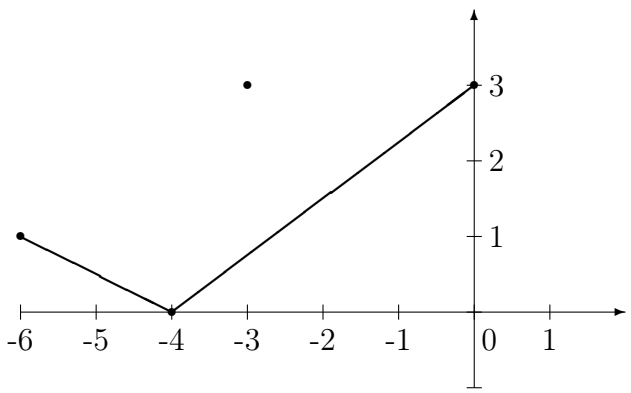
3. Először felírjuk az $\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_1^2$ háromváltozós szimmetrikus polinomot az elemi szimmetrikusok polinomjaként. Az első lépésben a lexikografikusan legnagyobb tagot a σ_2^2-nel tudjuk kiejteni. Viszont

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)^2 = \\ = \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + 2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 = \\ = \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + 2\sigma_1\sigma_3 \ , \end{aligned}$$

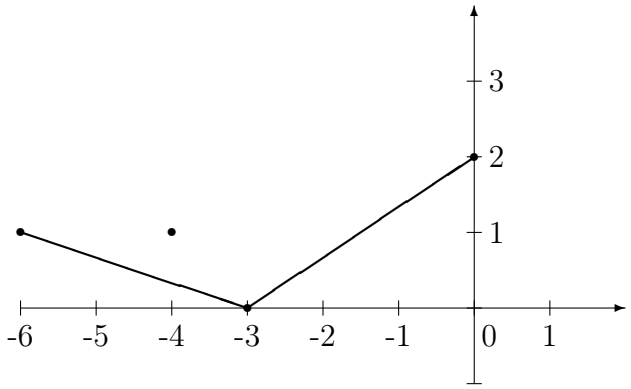
azaz a keresett érték $\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 = p^2$, hiszen a gyökök és együtthatók közötti összefüggés szerint $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = p$ és $\sigma_3 = -q$.

4. $x^{24} - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)\Phi_4(x)\Phi_6(x)\Phi_8(x)\Phi_{12}(x)\Phi_{24}(x)$. Ezek a szorzótényezők rendre $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2$, $\varphi(8) = \varphi(12) = 4$, és $\varphi(24) = 8$ fokúak. Ezek közül az 5-öt csak $4+1$ és $2+2+1$ alakban lehet felírni összegként. A $4+1$ konfiguráció $2 \cdot 2 = 4$-féleképpen állhat elő, a $2+2+1$ pedig $\binom{3}{2} \cdot 2 = 6$-féleképpen, azaz 10 ilyen polinom van.

5. A p prímmel a Newton-poligonja a polinomnak



Ebből az következik, hogy a polinomot $\mathbb{Q}$ fölött csak egy másodfokú és egy 4-edfokú szorzatára lehet bontani, ha nem irreducibilis. A q prímmel pedig



a Newton-poligon. Ebből pedig az következik, hogy ha felbomlik a polinom, akkor csak két harmadfokú szorzatára bomolhat. A kettőt kombinálva azt kapjuk, hogy a polinom irreducibilis.

6. Jelöljük a_n-nel a determináns értékét. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $a_n = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$. Ha $n = 1$, akkor ez világos, legyen tehát $n > 1$. Az utolsó oszlop, majd az utolsó sor szerint kifejtve

$$a_n = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2n+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} x_n \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ x_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{n-1} + (-1)^{n+2}(-1)^{n+1} x_n^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{n-1} - x_n^2 = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ .$$

7. Teljes indukció k szerint. $k = 0$-ra az állítás világos, hiszen az identitás permutációban 0 az inverziók száma. Legyen tehát $0 < k \leq \binom{n}{2}$ és vegyünk egy π_{k-1} permutációt, amiben az inverziók száma éppen $k - 1$. Mivel $k - 1 < \binom{n}{2}$, ezért ez nem az a permutáció, melyben bármely két szám inverzióban áll. Speciálisan kell lennie olyan számnak a permutációban, ami után nagyobb következik, hiszen egyébként szigorúan csökkenő sorrendben lennének a számok. Ezt a két számot megcserélve pontosan eggyel nő az inverziók száma, hiszen ugyanazok a számok állnak inverzióban most is, mint eddig, kivéve, hogy a frissen megcserélt két számunk eddig nem állt inverzióban, most viszont már abban áll.