

Algebra1 Intenzív verzió

2. ZH

2011. december 9.

A maximális pontszám minden feladatra 1 pont. A ZH jegye a pontszám egészrésze. Használni egy, kézzel írott A_4 -es lapot lehet – viszont semmi mást (pl. számológépet, mobiltelefont) nem. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Igazoljuk, hogy ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ lineárisan független egy \mathbb{R} fölötti V vektortérben, akkor $\{29v_1 - 17v_2 + 33v_3, v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ is lineárisan független. Igaz-e a megfordítás?
2. Igazoljuk, hogy $x^4 + x^3 + 1$ irreducibilis \mathbb{Q} fölött.
3. Legyenek V és W véges dimenziós vektorterek a K test fölött, φ és ψ lineáris leképezések V -ből W -be. Tegyük fel, hogy $\text{Ker}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(\psi)$ és $\text{Im}(\varphi) \subseteq \text{Im}(\psi)$. Igaz-e, hogy ekkor $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$ és $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\psi)$?
4. Hány egész együtthatós 15-ödfokú osztója van az $x^{30} - 1$ polinomnak?
5. Legyen n egy rögzített pozitív egész szám. Keressük meg azt a legalacsonyabb fokszámú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, melyre $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, \dots , $f(n) = 2^n$.
6. Legyen $f(x) = \sum_{i=0}^{2m+1} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ páratlan fokú polinom ($m \geq 1$). Tegyük fel, hogy van olyan p prímszám, amire $p \nmid a_{2m+1}$, $p \mid a_i$ ($m+1 \leq i \leq 2m$), $p^2 \mid a_j$ ($0 \leq j \leq m$), $p^3 \nmid a_0$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ irreducibilis \mathbb{Q} felett.
7. Legyenek adottak az $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ valós számok, továbbá jelölje $b_k = a_1^k + \dots + a_n^k$ a hatványösszegeiket ($k = 0, 1, 2, \dots$). Számítsuk ki az alábbi determinánst:

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_n & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-4} & b_{2n-3} \\ b_{n-1} & b_n & b_{n+1} & \cdots & b_{2n-3} & b_{2n-2} \end{vmatrix}$$