Algebra1 Intenzív verzió

1. ZH

2011. október 21.

A maximális pontszám minden feladatra 1 pont. A ZH jegye a pontszám egészrésze. Használni egy, kézzel írott A_4-es lapot lehet – viszont semmi mást (pl. számológépet, mobiltelefont) nem. A rendelkezésre álló idő 90 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Tudjuk, hogy a $z^5 + az^3 + b = 0$ egyenletnek gyöke $z = 1 + i$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg a és b értékét.

2. Tegyük fel, hogy egy $Ax = b$ valós együtthatós egyenletrendszernek van olyan megoldása a komplex számok körében, ami nem csupa valós számokból áll. (Azaz $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, és van olyan $z \in \mathbb{C}^n$, $z \notin \mathbb{R}^n$, melyre $Az = b$.) Hány valós megoldása van ekkor az egyenletrendszernek?

3. Legyen z egy olyan komplex szám, melyre z és iz^2 rendje egyenlő. Mennyi lehet z rendje?

4. S_5-nek hány elemével cserélhető fel az (12)(345) permutáció?

5. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan mátrix, melyre $A^2 = A$. Bizonyítsuk be, hogy $I+A$ invertálható, ahol I az $n \times n$-es egységmátrix.

6. Legyen
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{x + j - 1}{j} \right),$$
ahol az üres szorzatot ($k = 0$-ra) természetesen 1-nek értelmezzük. Határozzuk meg $P_n(x)$ gyöktényezős felbontását.

7. Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, melyekre $AB = BA = I$, ahol I az $n \times n$-es egységmátrix. Tegyük fel, hogy mind A mind B összes eleme nemnegatív. Bizonyítsuk be, hogy A minden sorában és oszlopában pontosan egy pozitív szám van.