Algebra1 Intenzív verzió

9. gyakorlat

2011. november 15.

1. Ha $fp + gq = (p, q)$, akkor mi f és g legnagyobb közös osztója?
2. Bizonyítsuk be, hogy $x^{3n} + x^{3k+1} + x^{3l+2}$ osztható $x^2 + x + 1$-gyel.
3. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(p/q) = 0$ $(, pq, \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1)$. Bizonyítsuk be, hogy $p - q \mid f(1)$, $p + q \mid f(-1)$.
4. Igazoljuk, hogy ha $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $f(0), f(1)$ páratlan számok, akkor f-nek nincs egész gyöke.
5. Bontsuk fel az $x^4 - 1$, $x^4 + 1$, $x^4 + 9$, $x^6 - 4x^3 + 3$ polinomokat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett irreducibilisek szorzatára.
6. Bontsuk $2x^3 + 3x + 5$-öt $\mathbb{Q}$ felett irreducibilisek szorzatára.
7. Mely c egész számokra irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett az $x^4 + c$ polinom? És mely racionális c-kre $\mathbb{Q}$ felett?
8. Bontsuk $x^4 - 10x^2 + 1$-et $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{F}_{11}$ felett irreducibilisek szorzatára.

9.* Igazoljuk, hogy $x^n + x + 3$ minden $n > 1$ egész számra irreducible $\mathbb{Z}$ felett.

10.* Legyen f egy n-edfokú egész együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy ha f helyettesítési értéke legalább $2n + 1$ (különböző) helyen prímszám, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.

11.* Van-e olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$, hogy minden $g \in \mathbb{Z}[x]$ nem konstans polinomra az $f(g(x))$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött?

12. Lehet-e egy $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{F}_2$ fölött irreducibilis polinomnak többszörös gyöke egy nagyobb testben? Igaz-e $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{F}_2$ fölött, hogy ha az f polinomra $(f, f') \neq 1$, akkor van olyan g irreducibilis polinom, hogy $g^2 \mid f$?
13. Legyen p egy prímszám, $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n > 1$, és $0 < k < n$. Legyen $\overline{f} \in \mathbb{F}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?
    a) Ha f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött.
    b) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.
    c) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.
    d) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.
    e) Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ fölött k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.