

Algebra1 Intenzív verzió

8. gyakorlat

2011. november 8.

1. Keressük meg azt az a értéket, melyre a $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix rangja a lehető legkisebb. Mennyi a rang a ezen értékére, és mennyi a rang a többi a értékekre?
2. Bizonyítsuk be, hogy egy $A \in K^{k \times n}$ mátrix rangja akkor és csak akkor 1, ha A egy k hosszúságú (nem nulla) sorvektor és egy n hosszúságú (nem nulla) oszlopvektor szorzataként áll elő.
3. Tegyük fel, hogy egy komplex együtthatós polinom minden valós (racionális) helyen valós (racionális) értéket vesz fel. Igazoljuk, hogy valós (racionális) együtthatós.
4. Tegyük fel, hogy $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$ minden egész helyen egész értéket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy $n!a_n \in \mathbb{Z}$.
5. Igazoljuk, hogy $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \in \mathbb{Q}[x]$ akkor és csak akkor vesz fel minden egész helyen egész értéket, ha f az $f(x) = \sum_{i=0}^n b_i h_i(x)$ alakba írható, ahol $b_i \in \mathbb{Z}$ és $h_0(x) = 1$, $h_i(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-i+1)}{i!}$ (ha $i \geq 1$). Az f ilyen felírása egyértelmű.
6. Bizonyítsuk be, hogy \mathbb{F}_p felett minden (egy- vagy többváltozós) függvény polinomfüggvény.
7. A $p = ix_1x_2x_3x_4^2 - x_1^2x_3^2 + 3x_1^3x_2 + \pi x_1^2x_2^3 + x_4 - x_1^2x_2^2x_3 + 2x_1^2x_2x_3x_4 - 6x_1^2x_2^2x_4$ polinomot bontsuk föl homogén polinomok összegére, ezeket rendezzük lexikografikusan, és állapítsuk meg a p^7 polinomban egyrészt a lexikografikusan legnagyobb tagot, másrészt a legnagyobb fokú tagok közül a lexikografikusan legnagyobb tagot.
8. Ha egy háromváltozós szimmetrikus polinom lexikografikusan legnagyobb tagja $x_1^2x_2^2x_3$, akkor lehet-e tagja $x_1x_2^3x_3$? Szerepelhet-e hatodfokú tag? Hány tag lehet legfeljebb? Amikor elemi szimmetrikusakkal írjuk föl, mi az eljárás első lépése?
9. Legyen $H(y_1, y_2, y_3) = 30y_1y_3^3 - y_2^5$. Helyettesítsük be mindegyik y_i helyére a megfelelő $\sigma_i(x_1, x_2, x_3)$ polinomot, és adjuk meg az eredmény egy nem nulla tagját.
10. Mutassuk meg, hogy nem létezik végtelen sok olyan egytagú $P_1, P_2, \dots \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom, melyekre $P_1 \succ P_2 \succ \dots$ teljesül.

11. Számítsuk ki a $2x^4 + 2x + 3$ polinom négy komplex gyökének összegét, szorzatát, négyzetösszegét, valamint e gyökök reciprokaiknak összegét.
12. Fejazzük ki elemi szimmetrikus polinomokkal a $\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i^2 x_j$ polinomot.
13. Határozzuk meg az $x^n + x + 1$ polinom (komplex) gyökeinek köbösszegét, és a gyökök reciprokaiknak összegét ($n \geq 2$).
14. Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Írjuk föl azt a két harmadfokú normált polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2 , illetve $a + b, a + c, b + c$.
15. Állítsuk elő s_4 -et és s_5 -öt elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.
- 16.* Legyen f egy egész együtthatós, normált polinom, melynek mindegyik komplex gyöke 1 abszolút értékű. Igazoljuk, hogy f mindegyik gyöke komplex egységgyök.