Algebra1 Intenzív verzió

6. gyakorlat

2011. október 18.

1. Mutassuk meg, hogy egy permutáció akkor és csak akkor hatványa egy ciklusnak, ha diszjunkt ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos. (Az egy elemű ciklusokat nem írjuk ki.)

2.* Tegyük fel, hogy k és t egynél nagyobb, relatív prím egészek. Az $1, 2, \ldots, n$ számok $1, 2, \ldots, n$ sorrendjéből kiindulva tetszőleges két olyan elemet fölcserélhetünk, amelyek különbsége k vagy t. Bizonyítsuk be, hogy ilyen lépések egymásutánjával akkor és csak akkor juthatunk el minden lehetséges sorrendhez, ha $k + t - 1 \leq n$.

3. Az $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?

4. Egy determináns egyik kifejtési tagját tükrözzük a determináns mellékátlójára. Hogyan változik meg a megfelelő permutációban az inverziók száma?

5. Egy 2011×2011-es determináns minden sora számtani sorozat. Számítsuk ki a determinánst.

6. Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha $\det M \in \{1, -1\}$.

7. Legyen K test, $M \in K^{n\times m}$, és $E_{ij} \in K^{n\times n}$ az a mátrix, amiben az i-edik sor j-edik eleme 1, a többi elem 0. Mutassuk meg az alábbiakat.

   (1) Az $E_{ij}M$ mátrix i-edik sora éppen az M mátrix j-edik sora, a többi sor pedig azonosan nulla.

   (2) Az $I + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj} = E_{ij} + E_{ji} + \sum_{k\neq i,j} E_{kk}$ mátrixszal való balszorzás felcseréli M-ben az i-edik és a j-edik sort.

   (3) Az $I + \lambda E_{ij}$-vel való balszorzás az M mátrix j-edik sorának λ-szorosát hozzáadja az i-edik sorhoz.

   (4) Ha az egységmátrix főátlójának i-edik elemét 1-ről λ-ra változtatjuk, akkor az ezzel a mátrixszal való balszorzás az M mátrix i-edik sorát λ-szorosára változtatja.

   Igazoljuk azt is, hogy balszorzás helyett jobbról szorozva a megfelelő $m \times m$-es mátrixokkal az oszlopokra vonatkozó analóg átalakításokat kapjuk.

8.* Van-e olyan $123456789 \times 123456789$-es mátrix, melyben csak a 0 és 1 számok szerepelnek, és determinánsa 2?

9.* Legyen $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, és ε_j a $2\pi j/n$ szöghöz tartozó n-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0) f(\varepsilon_1) \cdots f(\varepsilon_{n-1}).$$

10.* Adjunk példát olyan R egységelemes gyűrűre és $r \in R$ elemre, melynek létezik balinverze, de nem létezik jobbinverze.

11.* Legyen $p > 2$ prím, és tekintsük az $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-2} x^{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$ kongruenciát, ahol $p \nmid a_0$. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor megoldható, ha

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \cdots & a_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p}.$$

12.* Legyen f_n a Fibonacci-sorozat n-edik eleme, ahol $f_0 = 0, f_1 = 1$, és $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám, akkor $f_p \equiv \left(\frac{5}{p}\right) \pmod{p}$, ahol $\left(\frac{5}{p}\right)$ a Legendre-szimbólumot jelöli.

13.** Az I/14.-es feladat felhasználásával bizonyítsuk be a kvadratikus reciprocitási tételt, azaz hogy $p, q > 2$ különböző prímek esetén $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$.