Algebra1 Intenzív verzió

5. gyakorlat

2011. október 11.

1. Írjuk fel az alábbi permutációk ciklusfelbontását:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 6 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix};$$

$$(35)(1432)(53)(1234); \quad (123)^{-1}; \quad (54321)(243)(12345).$$

2. Bizonyítsuk be, hogy $(12\cdots k) = (21)(32)\cdots(k, k-1)$, illetve hogy $(12\cdots k) = (1, k)(1, k-1)\cdots(12)$.

3. Hány különböző hatványa van az $f = (12)(34)(567)$ permutációnak? Mely n és k egész számokra lesz $f^k = f^n$?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $(x_1 x_2 \cdots x_k)$ egy tetszőleges ciklus az S_n csoportban, akkor $f^{-1}(x_1 x_2 \cdots x_k) f = (x_1^f x_2^f \cdots x_k^f)$, ahol x_j^f jelöli x_j képét az f permutációnál.

5. Rendezhetők-e a könyvek a könyvespolcon ha csak szomszédos könyvek cseréjét engedjük meg?

6. Adjuk meg az összes olyan $f \in S_n$ permutációt, amely felcserélhető az $(12\cdots n)$ ciklussal.

7. Igazoljuk, hogy S_n minden eleme előáll legfeljebb $n-1$ transzpozíció szorzataként. $(*)$ Éles-e ez a határ?

8. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Igazoljuk, hogy ha egy komplex elemű determinánsban $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós.

10. Egy (egészegyütthatós) determinánsban minden oszlopösszeg osztható 7-tel. Bizonyítsuk be, hogy a determináns értéke is osztható 7-tel.

11. Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es determinánsban egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból áll, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.

12. Legyen K test, $A \in K^{k \times k}$, $B \in K^{m \times m}$, $X \in K^{k \times m}$ és O az $m \times k$-as nullmátrix. Rakjuk össze az M mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen: $M := \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

13. Legyen A és B most $n \times n$-es K feletti mátrix, és I az $n \times n$-es egységmátrix, 0 pedig a nullmátrix. Az $\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix}$ blokkmátrixot megfelelően Gauß-eliminálva adjunk új bizonyítást a determinánsok szorzástételére.

14. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$