

Algebra1 Intenzív verzió

4. gyakorlat

2011. október 4.

1. Jelölje F_α a síkon az origó körüli, pozitív irányú, α szögű forgatást, és T az $y = x$ egyenesre való tükrözést. Számítsuk ki az (x, y) pont képét ezeknél a transzformációknál, és adjunk meg olyan 2×2 -es M_α , ill. M_T mátrixokat, melyekre $M_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_\alpha(x, y)$, ill. $M_T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(x, y)$. Tükrözés, illetve forgatás lesz-e $F_\alpha \circ F_\beta$, $F_\alpha \circ T$, $T \circ F_\alpha$?
2. Mely geometriai transzformációk felelnek meg az oszlopvektorok alábbi mátrixokkal balról való szorzásához? Adjuk meg ezek inverzét, ha létezik. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Végezzük el az alábbi szorzásokat: a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;
c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3)$; d) $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok n -edik hatványát: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha u egy 1×2 -es sorvektor, v pedig egy 2×1 -es oszlopvektor, akkor $uv = |u||v| \cos \alpha$, ahol α az u , v vektorok által bezárt szög.
6. Legyen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ egy 2×2 -es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $M^2 - (a+d)M + (ad - bc)I = 0$, ahol I az egységmátrix.
7. Adjuk meg $M_2(\mathbb{R})$ -ben az $X^2 = I$, $X^2 = -I$, $X^2 = 0$ és $X^2 = X$ egyenletek minél több megoldását!
8. Az A és B mátrixok *felcserélhetők*, ha $AB = BA$. Melyek azok az $n \times n$ -es mátrixok, amelyek minden más mátrixszal felcserélhetők? Először oldjuk meg a feladatot 2×2 -es mátrixokra.

9. Milyen mátrixokkal felcserélhetők az alábbi mátrixok: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?
10. Egy négyzetes mátrixot felső (alsó) háromszög-mátrixnak nevezünk, ha a főátló alatt (felett) az összes elem 0. Bizonyítsuk be, hogy az $n \times n$ -es felső háromszög-mátrixok (a szokásos mátrix szorzással és összeadással) gyűrűt alkotnak!
11. Bizonyítsuk be, hogy ha M egy olyan $n \times n$ -es felső háromszög-mátrix, aminek a főátlójában is csupa 0 van, akkor $M^n = 0$. Először lássuk be 2×2 -es mátrixokra.
- 12.* Mely A és B $n \times n$ -es mátrixokra teljesül $AB - BA = I$?
- 13.* Igazoljuk, hogy $M_2(\mathbb{C})$ -nek nemkommutatív részgyűrűjét alkotják a $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $z, w \in \mathbb{C}$. Mutassuk meg, hogy ez ferdetest, és keressünk benne \mathbb{C} -vel izomorf részttestet.
- 14.* Jelölje $Z[\sqrt{d}]$ az $a + b\sqrt{d}$ alakú számok részgyűrűjét \mathbb{C} -ben, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ -ben végtelen sok invertálható elem van.
- 15.* Jelölje $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ az $\{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ részgyűrűt \mathbb{C} -ben. Mikor izomorf $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$?
- 16.* Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű, és tekintsük az $a + bi$ alakú formális kifejezéseket, ahol $a, b \in R$ (ezeket nevezhetnénk R fölötti komplex számoknak). A műveleteket ugyanúgy végezzük, mint a közönséges komplex számok esetén. Milyen p prímek esetén kapunk testet, ha $R = \mathbb{F}_p$?
- 17.* Bizonyítsuk be, hogy ha egy egységelemes gyűrűben $1 - ab$ invertálható, akkor $1 - ba$ is.