Algebra1 Intenzív verzió

3. gyakorlat

2011. szeptember 27.

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között.

   a) $x^3 - 6ix - i + 8 = 0$.

   b) $x^3 + 12x - 16i = 0$.

   c) $x^3 - 21x + 20 = 0$.

   d) $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0$.

2. Keressük meg az $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ polinom harmadfokú rezolvensének mindhárom gyökét. Hogyan változik f felbontása két másodfokú szorzatára, ha a rezolvensnek más-más gyökét használjuk?

3. Legyen $f(x) = x^4+px^2+qx+r = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$. Igazoljuk a következő állításokat.

   (i) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$.

   (ii) Az f harmadfokú rezolvense $g(x) = 8(x - u_1)(x - u_2)(x - u_3)$, ahol
   $$u_1 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4)/2, \quad u_2 = (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4)/2, \quad u_3 = (\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)/2.$$

   (iii) Ha a megoldási eljárásban az $u = u_1$ gyököt használjuk, akkor az f másodfokúakra történő felbontásának tényezői $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ és $(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$ lesznek.

   (iv) $2u_1 - p = (\alpha_1 + \alpha_2)^2$.

   (v) $q = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4)$.

   (vi) $u_1^2 - r = (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4)^2/4$.

   (vii) Ha $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 = 0$, akkor $u_1^2 - r = (\alpha_1 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2/4$.

4.* *a)* Legyenek $p_0, \ldots, p_{n-1} \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} p_k > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a
$$z^n - p_{n-1}z^{n-1} - \cdots - p_1 z - p_0 = 0$$
egyenletnek pontosan egy pozitív gyöke van.

b) Legyen z_0 a $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ ($a_k \in \mathbb{C}$) polinom gyöke. Bizonyítsuk be, hogy $|z_0| \leq \zeta$, ahol ζ a $z^n - |a_{n-1}|z^{n-1} - \cdots - |a_0|$ polinom egyetlen pozitív zérushelyét jelöli.

c) Legyen $0 < p_n < p_{n-1} < \cdots < p_0$. Bizonyítsuk be, hogy a $p_n z^n + \cdots + p_1 z + p_0$ polinomnak nincsen gyöke a $|z| \leq 1$ körlapon.

5. A Gauß-elimináció (vagy a józan ész) segítségével oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket. Ugyanazok a megoldások adódnak-e, ha a valós, ill. ha a komplex számok körében keressük a megoldásokat?

$$a)\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12 \end{cases}$$

6. Vegyük egy lineáris egyenletrendszer összes lehetséges megoldásában előforduló x_1 értékek H halmazát. Bizonyítsuk be, hogy H vagy az üres halmaz, vagy egyelemű, vagy egyenlő a K testtel.

7. A

$$\begin{aligned} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerben a változók mely halmazai játszhatják a szabad változók szerepét?

8. Igazoljuk, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi vektortéraxiómából.

9. Vektortér-e a W halmaz az alábbi esetekben? A műveletek mindig a szokásosak.

   a) W a páros fokú $K[x]$-beli polinomok és a zéruspolinom a K test felett.

   b) W a legfeljebb tizedfokú $K[x]$-beli polinomok és a zéruspolinom a K test felett.

   c) W azok az $f \in \mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyekre $f(0) = 1$.

   d) W azok az $f \in \mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyekre $f(\sqrt[3]{2}) = 0$.

   e) W azok a $\mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek van valós gyöke.

   f) W azok a $\mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyek egész helyen egész értéket vesznek fel.

   g) $W = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$ az $\mathbb{R}$ illetve a $\mathbb{C}$ felett.

   h) $W = \{a + b\sqrt[3]{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ a $\mathbb{Q}$ felett.

   i) W az első és harmadik síknegyed uniója $\mathbb{R}$ felett.

   j) $W = \mathbb{R}$ az $\mathbb{F}_2$ test fölött, ahol $0v = 0$ és $1v = v$.

10. Legyen $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ a szokásos műveletekkel, és definiáljuk a vektortérműveleteket az $u \oplus v = u + v - 1$ és $\lambda \odot v = \lambda v - \lambda + 1$ képletekkel. Ellenőrizzük, hogy vektorteret kaptunk. Hogyan lehetne ezt úgy megtenni, hogy nem számoljuk végig a nyolc axiómát?