Algebra1 Intenzív verzió

2. gyakorlat

2011. szeptember 20.

1. Hányszoros gyöke az $x^4 - x^3 - x + 1$ polinomnak az $x = 1$?
2. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ polinomnak nincs többszörös gyöke.
3. Gyűrűt alkotnak-e a szokásos $K[x]$-beli összeadásra és szorzásra nézve $a)$ a páros fokú elemek $b)$ a legalább tizedfokú elemek a 0-val együtt $c)$ azok a polinomok, ahol minden $k \geq 1$ egészre x^{2k-1} együtthatója 0?
4. Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot a $2x^2 + 2x - 3$ polinommal.
5. Egy $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom $x-1$-gyel osztva 2-t, $x-2$-vel osztva 1-et ad maradékul. Mennyi a maradék $(x-1)(x-2)$-vel osztva?
6. Osszuk el maradékosan az $(x \sin\alpha + \cos\alpha)^n$ polinomot az $x^2 + 1$ polinommal. Mi lesz a maradék?
7. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{C}[x]$-ben teljesül $(x^n - 1, x^k - 1) = x^{(n,k)} - 1$. Bizonyítsuk be, hogy $(a^n - 1, a^k - 1) = a^{(n,k)} - 1$ az egész számok körében, ahol $a > 1$ egész szám. Mi a kapcsolat a két állítás között?
8. Mutassuk meg, hogy véges test nem lehet algebrailag zárt.
9. Az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egyik csúcsából a többi csúcsba húzott szakaszok hosszát összeszoroztuk. Mennyi az eredmény?
10. Legyen R egy kommutatív, egységelemes gyűrű.

    $a)$ Bizonyítsuk be, hogy ha az $R[x]$ polinomgyűrű definíciójában a változó negatív kitevős hatványait is megengedjük (de összesen csak véges sok tagot), akkor egy gyűrűt kapunk. Ezt a gyűrűt a Laurent-polinomok gyűrűjének nevezik, és $R[x, x^{-1}]$-szel jelölik. Mik $K[x, x^{-1}]$ invertálható elemei, ha K test?

    $b)^*$ Bizonyítsuk be, hogy ha a polinomok sorozatos definíciójában nem kötjük ki, hogy $a_n = 0$ minden elég nagy n-re, akkor is gyűrűt kapunk. Ennek a gyűrűnek a neve a formális hatványsorok gyűrűje, jelölés: $R[[x]]$. Mik $K[[x]]$ invertálható elemei, ha K test?

*c)** Bizonyítsuk be, hogy ha a polinomok sorozatos definíciójában nem kötjük ki, hogy $a_n = 0$ minden elég nagy n-re, és megengedünk *véges sok* negatív kitevőjű tagot is, akkor is gyűrűt kapunk. Ennek a gyűrűnek a neve a formális Laurent-sorok gyűrűje, jelölés: $R((x))$. Igazoljuk, hogy $K((x))$ test, ha K test.

*d)** Gyűrűt kapunk-e, ha a polinomok definíciójánál végtelen sok negatív és végtelen sok pozitív kitevős tagot is megengedünk?

11. Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e?

    a) $\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.

    b) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza a pontonkénti összeadásra és szorzásra.

    c) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza a pontonkénti összeadásra és a kompozícióra, mint szorzásra.

    d) Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés. (Két halmaz szimmetrikus differenciája azokból az elemekből áll, amelyek a két halmaz közül pontosan egyben vannak benne.)

    e) A 3-dimenziós tér vektorai az összeadásra és a (i) skaláris (ii) vektoriális szorzásra nézve.

12. Igazoljuk, hogy tetszőleges gyűrűben $0r = r0 = 0$, és $(-r)s = -(rs)$.

13. Igazoljuk, hogy tetszőleges gyűrűben $(-a) \cdot (-b) = ab$.

14. Igazoljuk, hogy ha van egységelem, akkor az összeadás kommutativitása következik a többi gyűrűaxiómából.

15.* Bizonyítsuk be, hogy egy legalább kételemű, véges, nullosztómentes gyűrű ferdetest.