Algebra1 Intenzív verzió

11. gyakorlat

2011. november 29.

1. Az alábbi $\varphi\colon V_1 \to V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott adjuk meg a leképezés mátrixát a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban. Mi lesz a képtér, ill. a magtér?
   (a) V_1 és V_2 a sík $\mathbb{R}$ felett, φ egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés. A mátrixot csak az origó körüli α szögű forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítésre számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (-1,1)$ bázisban.
   (b) $V_1 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, φ az $1 + i$ számmal való szorzás.
   (c) $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, φ az $1 + i$ számmal való szorzás.
   (d) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az R felett, $\varphi(v)$ a v komponenseinek az összege.
   (e) $V_1 = V_2 = R^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, φ a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).
   (f) $V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $\varphi(f) = f(i)$.
   (g) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n-edfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $\varphi(f) = f'$ (derivált).

2. Legyen φ a térben a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, és ψ az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0,0,0)$ és $(1,1,1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi ezeknél az $(1,2,3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?

3. Álljon W a sík azon lineáris transzformációiból, amelyek az $(1,1)$ pontot nullába viszik. Igazoljuk, hogy ez altér (a sík lineáris transzoformációinak vektorterében), és határozzuk meg a dimenzióját.

4. Legyen W a V véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Bizonyítsuk be, hogy V-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek W a magtere, illetve a képtere.

5. Mely V vektorterekben van olyan $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, melyre $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$?

6. Legyen V véges dimenziós vektortér, $\varphi\colon V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\mathrm{Im}(\varphi^2) = \mathrm{Im}(\varphi)$, következik-e ebből, hogy $\mathrm{Ker}(\varphi^2) = \mathrm{Ker}(\varphi)$? Igaz-e a megfordítás?

7. Mutassuk meg, hogy ha φ idempotens lineáris transzformáció a V vektortéren, azaz $\varphi^2 = \varphi$, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi) = V$. (Az ilyen lineáris transzformációkat projekcióknak is nevezik.) Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens, ha nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.

8. Legyen V egy véges dimenziós vektortér és $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Igazoljuk, hogy van olyan k egész, melyre $V = \mathrm{Im}(\varphi^k) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi^k)$.
9. Egy φ lineáris transzformáció nilpotens, ha van olyan n pozitív egész, hogy $\varphi^n = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha az φ és ψ nilpotens, lineáris transzformációk felcserélhetők (azaz $\varphi\psi = \psi\varphi$), akkor $\varphi + \psi$ is nilpotens. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?
10. Legyen M nilpotens $n \times n$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.