

# Algebra1 Intenzív verzió

## 10. gyakorlat

2011. november 22.

1. Mutassuk meg, hogy  $6x^4 + 3x + 1$  irreducibilis  $\mathbb{Q}$  és  $\mathbb{Z}$  fölött.
2. Irreducibilisek-e az alábbi polinomok a  $\mathbb{Q}$  test fölött?  $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 3x - 2$ ,  $3x^7 + x^6 + 6x^2 + 2x - 2$ ,  $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 2x - 2$ ,  $x^{16} + 1$ ,  $x^{16} + 2$ ,  $x^4 - 14x^2 + 9$ ,  $x^4 - x^2 + 1$ ,  $3x^7 + 6x - 18$ ,  $x^5 + 4$ ,  $x^3 + 9$ ,  $x^5 + 729$ ,  $x^{10} - x^5 + 1$ ,  $x^{20} + 20$ ,  $x^4 + 25$ ,  $x^6 + 32$ ,  $x^4 + 4x + 1$ ,  $x^4 - 2x + 1$ ,  $x^4 + x^3 + 1$ ,  $x^4 + x^3 + 4$ ,  $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ .
3. Annak felhasználásával, hogy  $x^3 - 2$  irreducibilis  $\mathbb{Q}$  fölött, mutassuk meg, hogy  $\sqrt[3]{4}$  nem írható föl  $a + b\sqrt[3]{2}$  alakban, ahol  $a, b \in \mathbb{Q}$ .
4. Legyen  $f(x, y) = x^9 + x^3y^3 + y^2 + y \in \mathbb{C}[x, y]$ , és jelölje  $\mathbb{C}(y)$  a  $g(y)/h(y)$  alakú racionális törtfüggvényekből álló testet ( $g, h \in \mathbb{C}[y]$ ).
  - (a) Primitív-e  $f$ , mint  $\mathbb{C}[y]$  fölötti polinom?
  - (b) Következik-e a Schönemann-Eisenstein-tételből, hogy  $f$  irreducibilis  $\mathbb{C}(y)$  fölött?
  - (c) Irreducibilis-e  $f$  a  $\mathbb{C}[x, y]$ -ban?
5. Bontsuk irreducibilis faktorokra az  $(x + y + z)^k - x^k - y^k - z^k$  polinomot  $k = 3$  és  $k = 5$  esetén.
6. Igazoljuk, hogy ha  $n > 1$  páratlan, akkor  $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ .
7. Határozzuk meg a  $\Phi_n$  körosztási polinom együtthatóinak összegét.
8. Legyenek  $m \mid n$  pozitív egészek úgy, hogy  $n$  minden prímosztója osztja  $m$ -et is. Igazoljuk, hogy  $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$ . Számítsuk ki a prímszám-indexű körosztási polinomat.
9. Mutassuk meg, hogy a prímszám-indexű körosztási polinomok alkalmas eltolására teljesül a Schönemann-Eisenstein-kritérium feltétele, ami ebben a speciális esetben új bizonyítást ad az irreducibilitásra.
- 10\* Van-e olyan pozitív egész szám  $n$ , melyre  $\Phi_n(x)$ -nek van 1-nél nagyobb abszolút értékű együtthatója?
- 11\* Bizonyítsuk be, hogy az
  - (a)  $a + b\sqrt{2}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ;

(b)  $a + b\sqrt{3}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ;

(c)  $a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$

alakú számok körében igaz a számelmélet alaptétele.

- 12.\* Bizonyítsuk be, hogy egy egész együtthatós, 1 főegyütthatós polinom diszkriminánsa mindig 0-val vagy 1-gyel kongruens modulo 4.
- 13.\* (Kombinatorikai nullhelytétel.) Tegyük fel, hogy a  $K$  test feletti  $f \in K[x_1, \dots, x_n]$  polinom azonosan nulla az  $S_1 \times \dots \times S_n \subseteq K^n$  halmazon (ahol egyik  $S_i$  sem üres). Legyen  $g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i} (x_i - s)$ . Mutassuk meg, hogy  $f$  felírható  $\sum_{i=1}^n h_i g_i$  alakban, ahol mindegyik  $h_i \in K[x_1, \dots, x_n]$  polinom foka legfeljebb  $\deg(f) - \deg(g_i)$ .
- 14.\* Legyen  $p$  prímszám és  $G$  egy hurokélmentes gráf, melyben minden pont foka legfeljebb  $2p - 1$ , és a fokszámok átlaga nagyobb, mint  $2p - 2$ . Igazoljuk, hogy  $G$ -nek van olyan nem üres részgráfja, ahol minden pont foka  $p$ .