Algebra1 Intenzív verzió

1. gyakorlat

2011. szeptember 13.

1. Végezzük el az alábbi műveleteket: $(1-i)/(1-2i)$, $|\overline{(4+i)}/(4+i)|$, $(1+i)^{2007}$.

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között: $x = (3+2i)\overline{x}$, $x = 2\mathrm{Re}(x)$, $x^2 + 2ix - 1 = 0$, $x^4 = -9$, $x^7 = \sqrt{3} + i$, $x^n = -1$.

3. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakban: $1 - i$, $-1 - \sqrt{3}i$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$, $\sin\alpha + i\cos\alpha$, $(1 + i\tan\alpha)/(1 - i\tan\alpha)$.

4. Hol a hiba a következő levezetésben: $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i \cdot i = -1$?

5. A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései: $z \mapsto 3z + 2$, $z \mapsto (1+i)z$, $z \mapsto 1/\overline{z}$.

6. Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

7. Fejezzük ki $\cos x$ és $\sin x$ segítségével $\sin 7x$-et. Általánosítsunk.

8. Mennyi az n-edik egységgyökök szorzata? És a négyzetösszege?

9. Milyen összefüggés van ε és $-\varepsilon$ rendje között?

10. Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $-i\varepsilon$ rendje?

11. Legyenek m és n pozitív egészek.

    a) Hány közös gyöke van az $x^n = 1$ és az $x^m = 1$ egyenletnek?

    b) Igazoljuk, hogy egy m-edik és egy n-edik egységgyök szorzata mindig mn-edik egységgyök.

    c) Milyen m és n párra lesz egy primitív n-edik és egy primitív m-edik egységgyök szorzata primitív mn-edik egységgyök?

12. Hozzuk zárt alakra a $\sum_{m=0}^{n} \sin mx$ és a $\sum_{m=0}^{\infty} \binom{2007}{4m}$ összeget.

13.* Lefedhető-e a 100×100-as sakktábla 8×1-es dominókkal?

14.* Legyen p egy prímszám és $S = \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{j^2}$, ahol ε primitív p-edik egységgyök. Mennyi S^2?

15. Mutassuk meg, hogy a z_1, z_2, z_3, z_4 páronként különböző komplex számok akkor és csak akkor vannak egy körön vagy egy egyenesen, ha kettősviszonyuk, azaz a

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} / \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

kifejezés valós szám.

16.* Az

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0)$$

függvényeket törtlineáris függvényeknek nevezzük. Ez az egyetlen ∞ szimbólummal kiegészített számsíkon (vagy ha úgy tetszik a komplex számgömbön) is értelmezhető (hogyan?).

a) Igazoljuk, hogy a fenti f függvény akkor és csak akkor képezi a komplex egységkört saját magára úgy, hogy a kör belseje a kör belsejére képződik, ha felírható a következő alakban:

$$f(z) = k \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (|k| = 1, |\alpha| < 1).$$

b) Keressünk olyan törtlineáris függvényt, amely az egységkörvonalat a valós tengelyre, belsejét a felső félsíkra képezi.

c) Igazoljuk, hogy kör képe is, egyenes képe is egyenes vagy kör lesz minden törtlineáris leképezésnél.

17.* Legyen a $A \neq B$ két pont a síkon. Legyen C_λ azon P pontok mértani helye a síkon, melyekre $PA/PB = \lambda$, ahol λ egy pozitív valós szám. Bizonyítsuk be, hogy C_λ egy kör, ha $\lambda \neq 1$, és határozzuk meg a középpontját és a sugarát. Mi a helyzet, ha $\lambda = 1$?

18.* Legyen C_λ az előző feladatban szereplő kör. Bizonyítsuk be, hogy C_λ merőleges minden A-t és B-t összekötő egyenesre és körre.