Algebra1 Intenzív verzió

2. ZH - megoldásvázlatok

2010. december 9.

1. $\mathbb{F}_3$ fölött $x^5 + x^3 + x^2 + x + 2 = (x+1)(x-1)(x^3 - x + 1)$, melyben a harmadfokú tényező irreducibilis, hiszen nincs gyöke.

2. Az $y^3 - 3y - 1 = 0$ egyenletet oldjuk meg $y = 1/x$ helyettesítéssel. A képlettel a gyökök $\sqrt[3]{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$ alakba írhatók. Mivel $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$, ezért a három gyök $y_{1,2,3} = 2\cos(\pi/9), 2\cos(7\pi/9), 2\cos(13\pi/9)$, így
$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2\cos(\pi/9)}, \frac{1}{2\cos(7\pi/9)}, \frac{1}{2\cos(13\pi/9)}.$$
A feladatot természetesen megoldhatjuk az $x + 1 = y$ helyettesítéssel is.

3. (i) Az $x = 0$ nyilván nem gyök, ezért nem lehet többszörös gyök sem. Viszont ha z több, mint kétszeres gyök, akkor min. 2-szeres gyöke a deriváltnak, ami $nx^{n-1} + kax^{k-1}$. Mivel $z = 0$-t kizártuk, ezért z kétszeres gyöke $(nx^{n-k} + ka)$-nak, de utóbbi deriváltjának csak a 0 a gyöke, ami ellentmondás. (ii) $a = -7/3$, $b = 4/3$, $x = 1$ kétszeres gyök.

4. A feltétel azzal ekvivalens, hogy $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = (x-\alpha\beta)(x-\beta\gamma)(x-\gamma\alpha)$. Utóbbi polinomot kifejtve az együtthatók α, β, γ szimmetrikus polinomjai. Ezeket az elemi szimmetrikusokkal felírva azt kapjuk, hogy
$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - bx^2 + cax - c^2.$$
Az egyenletrendszert a, b, c-re megoldva azt kapjuk, hogy a kívánt polinomok x^3 és $x^3 + ax^2 - ax - 1$, ahol a tetszőleges.

5. Viszonylag könnyű számolás után a determinánsos alakból $R(f, f') = n^n + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}$, ezért $D(f) = (-1)^{n(n-1)/2}(n^n + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1})$, ahol $f(x) = x^n + x + 1$.

6. Vegyük észre, hogy $x^{2n} + x^n + 1 = \frac{x^{3n}-1}{x^n-1}$. Továbbá az $x^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d(x)$ összefüggést használva $m = n$-re és $m = 3n$-re azt kapjuk, hogy ha $3n$-nek legalább két olyan osztója van, mely n-nek nem osztója, akkor $x^{2n} + x^n + 1$ reducibilis. A $d = n$ mindig ilyen osztó. Továbbá ha $d \mid n$ olyan, amiben a 3 ugyanakkora hatványon szerepel, mint n-ben, akkor $3d$ nem osztója n-nek, de $3d \mid 3n$. Viszont ha n nem 3-hatvány, akkor van ilyen $d \neq n$, tehát a polinomunk reducibilis $\mathbb{Q}$ felett. Ha viszont $n = 3^k$, akkor $x^{2n} + x^n + 1 = \Phi_{3^{k+1}}(x)$, ami irreducibilis a 7. feladatsor 15. feladat szerint.

7. Legyenek α_i-k az $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ normált polinom gyökei $(1 \leq i \leq n)$. A $\prod_{i<j}(\alpha_i + \alpha_j)^2 - D(f)$ kifejezés a gyököknek szimmetrikus polinomja, melyben minden együttható osztható 4-gyel, hiszen $D(f) = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$ és $(\alpha_i + \alpha_j)^2 - (\alpha_i - \alpha_j)^2 = 4\alpha_i\alpha_j$. Tehát a szimmetrikus polinomok alaptétele szerint ez egy 4-gyel osztható egész szám. Viszont $\prod_{i<j}(\alpha_i + \alpha_j)$ szimmetrikus polinomja a gyököknek, tehát egész szám, azaz a négyzete 0 vagy 1 modulo 4.