Algebra1 Intenzív verzió

2. ZH

2010. december 9.

A maximális pontszám minden feladatra 1 pont. A ZH jegye a pontszám egészrésze. Használni minden írott és nyomtatott segédezközt lehet – számológépet, mobiltelefont viszont nem. A rendelkezésre álló idő 110 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Bontsuk irreducibilisek szorzatára $\mathbb{F}_3$ fölött az $x^5 + x^3 + x^2 + x + 2$ polinomot.
2. Oldjuk meg a komplex számok körében az $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ egyenletet.
3. Legyen $f(x) = x^n + ax^k + b \in \mathbb{Z}[x]$, ahol $b \neq 0$. *i*) Bizonyítsuk be, hogy f minden gyöke legfeljebb kétszeres. *ii*) Adjunk meg olyan f-et az $n = 7$, $k = 3$ esetben, aminek van kétszeres gyöke.
4. Legyenek α, β, γ az $x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom (nem feltétlen különböző, komplex) gyökei, ahol a, b és c rögzített komplex számok. Mely a, b, c értékekre lesz az (α, β, γ) számhármas egyenlő valamilyen sorrendben az $(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)$ számhármassal?
5. Mennyi a diszkrimánsa az $x^n + x + 1$ polinomnak?
6. Mely n pozitív egész számokra irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött az $x^{2n} + x^n + 1$ polinom?
7. Bizonyítsuk be, hogy egy egész együtthatós, 1-főegyütthatójú polinom diszkriminánsa mindig 0-val vagy 1-gyel kongruens modulo 4.