Algebra1 Intenzív verzió

1. ZH - megoldások

2010. november.

1. Legyen a két komplex szám $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, és $z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$. Ekkor $1 = |z_1+z_2|^2 = (\cos\alpha+\cos\beta)^2 + (\sin\alpha+\sin\beta)^2 = 2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$, melyből $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = -1/2$. Másrészt hasonló számolással $|z_1 - z_2|^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$, ami az előzőek alapján 3-mal egyenlő. Tehát $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. A számolást egyszerűsíti, ha az egyik komplex számról feltesszük, hogy 1, amit megtehetünk a forgásszimmetria miatt.

2. Paraméterezzük a síkot a komplex számokkal, jelölje a nagybetűs pontoknak megfelelő komplex számot a megfelelő kisbetű. Legyen továbbá $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, primitív hatodik egységgyök. Így $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$. Ekkor az ismert képletek alapján $d = a + \varepsilon(c-a)$, $e = \frac{b+2c+\varepsilon(b-c)}{3}$, $f = \frac{a+b}{2}$, $g = f - (e-f) = 2f - e = \frac{3a+2b-2c-\varepsilon(b-c)}{3}$. Azt kell ellenőrizni, hogy $d = g + \varepsilon(e-g)$. Ehhez a fentiek alapján
$$g + \varepsilon(e-g) =$$
$$\frac{3a+2b-2c-\varepsilon(b-c)}{3} + \varepsilon\frac{b+2c+\varepsilon(b-c) - (3a+2b-2c-\varepsilon(b-c))}{3} =$$
$$\frac{a(3-3\varepsilon) + b(2-2\varepsilon+2\varepsilon^2) + c(-2+5\varepsilon-2\varepsilon^2)}{3} = a(1-\varepsilon) + c\varepsilon = d.$$
A számolást egyszerűsíti, ha feltesszük például, hogy $a = -1$ és $b = 1$, amit megtehetünk a koordinátarendszer megfelelő megválasztásával.

3. I. megoldás: Az világos, hogy $\varepsilon^{4n} = i^4 = 1$, másnéven $\mathrm{ord}(\varepsilon) \mid 4n$. Ha $n = 2^\alpha$ valamely α egész számra, akkor $\varepsilon^{2^{\alpha+1}} = i^2 = -1$, tehát $\mathrm{ord}(\varepsilon) \nmid 2^{\alpha+1}$, ezért $\mathrm{ord}(\varepsilon) = 2^{\alpha+2} = 4n$. Másrészt, ha n nem kettőhatvány, akkor van egy páratlan osztója, ami nem 1. Két eset van: (1) ez a páratlan osztó $4k+1$ alakú, azaz $n = (4k+1)a$; (2) $4k-1$ alakú, azaz $n = (4k-1)a$ valamilyen pozitív egész a-ra. Az (1) esetben legyen $\varepsilon := \cos(\pi/(2a)) + i\sin(\pi/(2a))$, a (2) esetben pedig $\varepsilon := \cos(-\pi/(2a)) + i\sin(-\pi/(2a))$. Mindkét esetben nyilván $\varepsilon^{4a} = 1$, ezért $4a < 4n$ miatt ε nem primitív $4n$-edik egységgyök. Viszont az (1)-es esetben $\varepsilon^n = \varepsilon^{(4k+1)a} = \varepsilon^{4ka}\varepsilon^a = \varepsilon^a = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$, a (2)-es esetben pedig $\varepsilon^n = \varepsilon^{(4k-1)a} = \varepsilon^{4ka}\varepsilon^{-a} = \varepsilon^{-a} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$. Tehát az állítás pontosan akkor teljesül, ha n kettőhatvány.

   II. megoldás: Legyen $\varepsilon := \cos(\frac{2\pi a}{b}) + i\sin(\frac{2\pi a}{b})$, ahol a és b relatív prím pozitív egészek. A feltétel szerint $\varepsilon^n = i$, amiből $2\pi an/b = \pi/2 + 2k\pi$, azaz $4an = (4k+1)b$ valamely k egész számra. A feladat az, hogy mely n-ekre következik ebből, hogy $b = 4n$. Mivel $(a,b) = 1$, ezért $b \mid 4n$ mindig. Másrészt adott n és k esetén akkor következik, hogy $4n \mid b$, ha $(4n, 4k+1) = 1$, azaz olyan n-eket keresünk, melyek *minden* $4k+1$ alakú számhoz relatív prímek. Valóban, ha a $\frac{4k+1}{4n}$ törtet tudjuk egyszerűsíteni, akkor az egyszerűsített alak számlálóját választhatjuk a-nak, nevezőjét pedig b-nek, és kapunk egy ellenpéldát. Világos, hogy ha n kettőhatvány, akkor minden $4k+1$ alakú számhoz relatív prím. Ugyanakkor ha n nem kettőhatvány, akkor van egy 1-től különböző páratlan osztója. Ez a páratlan osztó ha 1-et maradékul 4-gyel osztva, akkor készen vagyunk, ha nem, akkor megszorozzuk 3-mal, és szintén kapunk egy $4k+1$ alakú, $4n$-hez nem relatív prím számot.

4. Először is N-nek 3×2-es mátrixnak kell lennie, mert az egységmátrixok négyzetesek. Továbbá, ha $c = 1$, akkor az MN szorzat első sora megegyezik a második sorával, tehát nem lehet az egységmátrix. Ha pedig $c \neq 1$, akkor az $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-c} & \frac{-c}{1-c} \\ \frac{-1}{1-c} & \frac{1}{1-c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix megfelel.

5. Legyen $f \in S_4$. Ekkor a gyakorlaton tanult képlet szerint $f^{-1}(12)(34)f = (1^f 2^f)(3^f 4^f)$. Így f és $(12)(34)$ pontosan akkor cserélhető fel, ha $(12)(34) = (1^f 2^f)(3^f 4^f)$. Tehát f az $\{1, 2\}$ és $\{3, 4\}$ halmazokat vagy fixen hagyja, vagy felcseréli (ebből rögtön látszik, hogy 8 ilyen permutáció van). Felírva az összes esetet a következő permutációkat kapjuk: (1), (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1423), és (1324).

6. Könnyű számolás mutatja, hogy ha $n = 1$, akkor a determináns értéke $a + b + c$, ha $n = 2$, akkor pedig $-9ab$. Legyen most $n \geq 3$. Vonjuk ki a 3. sorból a 2. sort, azután a 2. sorból az 1.-t. Ezeknél a lépéseknél a determináns értéke nem változik. Az új determinánsban a 2. sorban az összes elem $3a$ lesz, a 3. sorban pedig $5a$. Most a 2. sor 5/3-át kivonva a 3.-ból a 3. sor kinullázódik, ezért a determináns értéke 0.

7. Adjuk hozzá a determináns első oszlopához az összes többit, közben a determináns értéke nem változik. Mivel az eredeti determinánsban minden sorösszeg osztható volt 29-cel, az új determinánsban minden sor első eleme osztható lesz 29-cel. Ha az új determinánst kifejtjük, akkor minden kifejtési tagban lesz egy 29-cel osztható szám, tehát a determináns értéke is osztható 29-cel. Az állítás belátható a determináns mérete szerinti indukcióval is.