Algebra1 Intenzív verzió

1. ZH

2010. október 22.

A maximális pontszám minden feladatra 1 pont. A ZH jegye a pontszám egészrésze. Használni minden írott és nyomtatott segédezközt lehet – számológépet, mobiltelefont viszont nem. A rendelkezésre álló idő 120 perc. A feladatok **nincsenek nehézségi sorrendben**. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Két egységnyi abszolútértékű komplex szám összege is egységnyi abszolútértékű. Mennyi a különbségük abszolútértéke?
2. Vegyünk a síkon egy ABC háromszöget. Legyen D az AC oldal fölé kifelé írt szabályos háromszög csúcsa, E a BC oldal fölé kifelé rajzolt szabályos háromszög *középpontja*, F az AB oldal felezőpontja, továbbá G az E pontnak az F-re vonatkozó tükörképe. Bizonyítsuk be, hogy a DEG háromszög szabályos!
3. Legyen ε egy komplex szám, melyre $\varepsilon^n = i$. Mely n pozitív egész számokra következik ebből, hogy ε primitív $4n$-edik egységgyök?
4. Legyen $M = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$. Mely valós c értékekre van olyan (valamilyen méretű) N mátrix, melyre MN (alkalmas méretű) egységmátrix?
5. Az S_4 mely elemeivel cserélhető fel az $(12)(34)$ permutáció?
6. Legyenek a, b és c valós számok, n pedig egy pozitív egész. Mennyi annak az $n \times n$-es determinánsnak az értéke, melyben az i-edik sor j-edik eleme $ai^2 + bj^2 + c$ minden $1 \leq i, j \leq n$-re?
7. Egy egész számokból álló determinánsban minden sorösszeg osztható 29-cel. Bizonyítsuk be, hogy a determináns értéke is osztható 29-cel.