Algebra1 Intenzív verzió

5. gyakorlat

2010. október 11-14.

1. Írjuk fel az alábbi permutációk ciklusfelbontását:

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&7&3&6&4&5&8\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&5&6&1&4&3&8&7\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}a&b&c&d&e\\c&a&e&b&d\end{bmatrix};$$

$$(35)(1432)(53)(1234);\quad (123)^{-1};\quad (54321)(243)(12345).$$

2. Bizonyítsuk be, hogy $(12\cdots k) = (k, k-1)(k-1, k-2)\cdots(21)$, illetve hogy $(12\cdots k) = (12)(13)\cdots(1, k)$.

3. Hány különböző hatványa van az $f = (12)(34)(567)$ permutációnak? Mely n és k egész számokra lesz $f^k = f^n$?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $(x_1x_2\cdots x_k)$ egy tetszőleges ciklus az S_n csoportban, akkor $f^{-1}(x_1x_2\cdots x_k)f = (x_1^f x_2^f \cdots x_k^f)$, ahol x_j^f jelöli x_j képét az f permutációnál.

5. Rendezhetők-e a könyvek a könyvespolcon ha csak szomszédos könyvek cseréjét engedjük meg?

6. Adjuk meg az összes olyan $f \in S_n$ permutációt, amely felcserélhető az $(12\cdots n)$ ciklussal.

7. Igazoljuk, hogy S_n minden eleme előáll legfeljebb $n-1$ transzpozíció szorzataként. $(*)$ Éles-e ez a határ?

8. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}1&3&5\\2&5&9\\3&2&1\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{vmatrix}.$$

9. Igazoljuk, hogy ha egy komplex elemű determinánsban $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós.

10. Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es determinánsban egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból áll, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.

11. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix}1&2&\cdots&2\\2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&\cdots&n\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0\\1&2&1&\ddots&\vdots\\0&1&2&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&0&1&2\end{vmatrix}.$$

12. Konstruáljunk blokkrendszert $v = 13$, $k = 4$, $\lambda = 1$ paraméterekkel. (Útmutatás: Vegyünk egy szabályos 13-szöget, és válasszuk ki 4 csúcsát úgy, hogy köztük mind a 6-féle lehetséges távolság szerepeljen. Ennek a négyszögnek a 13 elforgatottja lesz a 13 blokk.) Írjuk fel a blokkrendszer incidenciamátrixát.

13.* Legyen $f(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$, és ε_j a $2\pi j/n$ szöghöz tartozó n-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1}).$$

14.* Legyen $p > 2$ prím, és tekintsük az $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{p-2}x^{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$ kongruenciát, ahol $p \nmid a_0$. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor megoldható, ha

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \cdots & a_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p}.$$