Algebra1 Intenzív verzió

3-4. gyakorlat

2010. szeptember 27-október 7.

1. Jelölje F_α a síkon az origó körüli, pozitív irányú, α szögű forgatást, és T az $y = x$ egyenesre való tükrözést. Számítsuk ki az (x, y) pont képét ezeknél a transzformációknál, és adjunk meg olyan 2×2-es M_α, ill. M_T mátrixokat, melyekre $M_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_\alpha(x, y)$, ill. $M_T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(x, y)$. Tükrözés, illetve forgatás lesz-e $F_\alpha \circ F_\beta$, $F_\alpha \circ T$, $T \circ F_\alpha$?

2. Mely geometriai transzformációk felelnek meg az oszlopvektorok alábbi mátrixokkal balról való szorzásához? Adjuk meg ezek inverzét, ha létezik. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Végezzük el az alábbi szorzásokat: *a)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; *c)* $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; *d)* $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; *e)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok n-edik hatványát: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha u egy 1×2-es sorvektor, v pedig egy 2×1-es oszlopvektor, akkor $uv = |u||v| \cos\alpha$, ahol α az u, v vektorok által bezárt szög.

6. Igaz-e az $n \times n$-es mátrixok körében az $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ azonosság?

7. Legyen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ egy 2×2-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)I = 0$, ahol I az egységmátrix.

8. Oldjuk meg az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 17 & 5 \end{pmatrix}$ egyenletet a 2×2-es mátrixok körében!

9. Adjuk meg $M_2(\mathbb{R})$-ben az $X^2 = I$, $X^2 = -I$, $X^2 = 0$ és $X^2 = X$ egyenletek minél több megoldását!

10. Az A és B mátrixok *felcserélhetők*, ha $AB = BA$. Melyek azok az $n \times n$-es mátrixok, amelyek minden más mátrixszal felcserélhetők? Először oldjuk meg a feladatot 2×2-es mátrixokra.

11. Milyen mátrixokkal felcserélhetők az alábbi mátrixok: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

12. Egy négyzetes mátrixot felső (alsó) háromszög-mátrixnak nevezünk, ha a főátló alatt (felett) az összes elem 0. Bizonyítsuk be, hogy az $n \times n$-es felső háromszög-mátrixok (a szokásos mátrix szorzással és összeadással) gyűrűt alkotnak!

13. Bizonyítsuk be, hogy ha M egy olyan $n \times n$-es felső háromszög-mátrix, aminek a főátlójában is csupa 0 van, akkor $M^n = 0$. Először lássuk be 2×2-es mátrixokra.

14.* Mely A és B $n \times n$-es mátrixokra teljesül $AB - BA = I$?

15. Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e?

   a) $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.

   b) Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza a pontonkénti összeadásra és szorzásra.

   c) Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza a pontonkénti összeadásra és a kompozícióra, mint szorzásra.

   d) Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés. (Két halmaz szimmetrikus differenciája azokból az elemekből áll, amelyek a két halmaz közül pontosan egyben vannak benne.)

   e) A 3-dimenziós tér vektorai az összeadásra és a (i) skaláris (ii) vektoriális szorzásra nézve.

16. Igazoljuk, hogy tetszőleges gyűrűben $0r = r0 = 0$, és $(-r)s = -(rs)$.

17. Igazoljuk, hogy tetszőleges gyűrűben $(-a) \cdot (-b) = ab$.

18. Mutassuk meg, hogy egy gyűrűben egy $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ szorzatot akárhogy is zárójelezünk, ugyanannyi lesz a szorzat.

19. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egységelemes R gyűrűben az r elem nilpotens, akkor van olyan $s \in R$, hogy $s(1-r) = (1-r)s = 1$.