Algebra1 Intenzív verzió

2. gyakorlat

2010. szeptember 20-23.

1. Oldjuk meg az $x^3 = 2$, $x^4 = -9$, $x^7 = \sqrt{3} + i$, $x^9 = 1 + i$, $x^n = -1$ egyenleteket a komplex számok között!
2. Hol a hiba a következő levezetésben: $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1$?
3. Fejezzük ki $\cos x$ és $\sin x$ segítségével $\sin 7x$-et! Általánosítsunk!
4. Mennyi az n-edik egységgyökök szorzata? És a négyzetösszege?
5. Tekintsük az 1, -1, i, $1 + i$, $(1 + i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi) + i \sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°) + i \sin(336°)$ számokat! Mennyi ezek rendje? Melyek ezek közül egységgyökök? Mely n-ekre lesznek n-edik egységgyökök? És primitív n-edik egységgyökök?
6. Szorozzuk össze a hatodik és negyedik egységgyököket minden lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?
7. Milyen összefüggés van ε és $-\varepsilon$ rendje között?
8. Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $-i\varepsilon$ rendje?
9. Legyenek m és n pozitív egészek!
   a) Hány közös gyöke van az $x^n = 1$ és az $x^m = 1$ egyenletnek?
   b) Igazoljuk, hogy egy m-edik és egy n-edik egységgyök szorzata mindig mn-edik egységgyök!
   c) Milyen m és n párra lesz egy primitív n-edik és egy primitív m-edik egységgyök szorzata primitív mn-edik egységgyök?
10. Hozzuk zárt alakra a $\sum_{m=0}^{n} \sin mx$ összeget!
11. Legyen p egy prímszám és $S = \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{j^2}$, ahol ε primitív p-edik egységgyök. Mennyi S^2?
12. Az $ABCD$ négyzet AB oldalára befelé és BC oldalára kifelé emeltük az ABP és BCR szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy a D, P és R pontok egy egyenesen vannak!
13. (Ptolemaiosz tétele) Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög oldalainak hossza rendre a, b, c, d, átlóinak hossza pedig e és f, akkor $ac + bd \geq ef$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a négyszög húrnégyszög.

14. Mutassuk meg, hogy a z_1, z_2, z_3, z_4 páronként különböző komplex számok akkor és csak akkor vannak egy körön vagy egy egyenesen, ha kettősviszonyuk, azaz a

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} / \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

kifejezés valós szám.

15. Az

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0)$$

függvényeket törtlineáris függvényeknek nevezzük. Ez az egyetlen ∞ szimbólummal kiegészített számsíkon (vagy ha úgy tetszik a komplex számgömbön) is értelmezhető (hogyan?).

a) Igazoljuk, hogy a fenti f függvény akkor és csak akkor képezi a komplex egységkört saját magára úgy, hogy a kör belseje a kör belsejére képződik, ha felírható a következő alakban:

$$f(z) = k \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (|k| = 1, |\alpha| < 1).$$

b) Keressünk olyan törtlineáris függvényt, amely az egységkörvonalat a valós tengelyre, belsejét a felső félsíkra képezi.

c) Igazoljuk, hogy kör képe is, egyenes képe is egyenes vagy kör lesz minden törtlineáris leképezésnél.

16. Legyen a $A \neq B$ két pont a síkon. Legyen C_λ azon P pontok mértani helye a síkon, melyekre $PA/PB = \lambda$, ahol λ egy pozitív valós szám. Bizonyítsuk be, hogy C_λ egy kör, ha $\lambda \neq 1$, és határozzuk meg a középpontját és a sugarát. Mi a helyzet, ha $\lambda = 1$?

17. Legyen C_λ az előző feladatban szereplő kör. Bizonyítsuk be, hogy C_λ merőleges minden A-t és B-t összekötő egyenesre és körre.