Algebra1 Intenzív verzió

10. gyakorlat

2010. december 2-6.

1. Igazoljuk, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi vektortéraxiómából.

2. Vektortér-e a W halmaz az alábbi esetekben? A műveletek mindig a szokásosak.

   a) W a páros fokú $K[x]$-beli polinomok és a zéruspolinom a K test felett.

   b) W a legfeljebb tizedfokú $K[x]$-beli polinomok és a zéruspolinom a K test felett.

   c) W azok az $f \in \mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyekre $f(0) = 1$.

   d) W azok az $f \in \mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyekre $f(\sqrt[3]{2}) = 0$.

   e) W azok a $\mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek van valós gyöke.

   f) W azok a $\mathbb{Q}[x]$-beli polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyek egész helyen egész értéket vesznek fel.

   g) $W = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = 0\}$ az $\mathbb{R}$ illetve a $\mathbb{C}$ felett.

   h) $W = \{a + b\sqrt[3]{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ a $\mathbb{Q}$ felett.

   i) W az első és harmadik síknegyed uniója $\mathbb{R}$ felett.

   j) $W = \mathbb{R}$ az $\mathbb{F}_2$ test fölött, ahol $0v = 0$ és $1v = v$.

3. Legyen $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ a szokásos műveletekkel, és definiáljuk a vektortérműveleteket az $u \oplus v = u + v - 1$ és $\lambda \odot v = \lambda v - \lambda + 1$ képletekkel. Ellenőrizzük, hogy vektorteret kaptunk. Hogyan lehetne ezt úgy megtenni, hogy nem számoljuk végig a nyolc axiómát?

4. Legyen W altere a K test feletti V vektortérnek, és $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $2u+6v \in W$ és $3u + v \in W$. Következik-e ebből, hogy $u, v \in W$? Milyen K testre következik?

5. Ha egy V vektortér vektoraira a $a \notin \langle b, c\rangle$, $b \notin \langle a, c\rangle$ és $c \in \langle a, b\rangle$, akkor mi a c?

6. Hány altere van az $\mathbb{F}_2$ test feletti 2, illetve 3 dimenziós vektortereknek?

7. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek véges sok altere van, akkor az alterek száma 1 vagy 2. Milyen K testek felett igaz még ez az állítás?