Algebra1 Intenzív verzió

1. gyakorlat

2010. szeptember 13-16.

1. Végezzük el az alábbi műveleteket: $(1+i)/(3-2i)$, $|\overline{(4+i)}/(4+i)|$, $(1+i)^{2007}$.
2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között: $x=(3+2i)\overline{x}$, $x=2\Re(x)$, $x^2+2ix-1=0$.
3. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakban: $1-i$, $-1-\sqrt{3}i$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$, $\sin\alpha+i\cos\alpha$, $(1+i\tan\alpha)/(1-i\tan\alpha)$.
4. Határozzuk meg azokat a $c+di$ számokat, melyek négyzete $20i-21$. Oldjuk meg az $x^2+(i-2)x+(6-6i)=0$ egyenletet.
5. Milyen geometriai alakzatot írnak le a sík alábbi részhalmazai: $\{z\colon \Re(z+2i)\leq -2\}$, $\{z\colon \Re(z+1)\geq \Im(z-3i)\}$, $\{z\colon |z-i-1|\leq 3\}$, $\{z\colon |z-3+2i|=|z+4-i|\}$, $\{z\colon z+\overline{z}=-1\}$, $\{z\colon 2z+5=2\overline{z}\}$, $\{z\colon 1/z=\overline{z}\}$, $\{z\colon 1/z+8=\overline{z}\}$, $\{z\colon |z|=iz\}$, $\{z\colon \Im((z-1)/(z+1))=0\}$, $\{z\colon \Re((z-1)/(z+1))=0\}$?
6. A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései: $z\mapsto 3z+2$, $z\mapsto(1+i)z$, $z\mapsto 1/\overline{z}$.
7. Igazoljuk, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege megegyezik az átlóinak a négyzetösszegével.
8. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}=\sin\theta+i\cos\theta,$$
és így
$$\left(1+\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\right)^5+i\left(1+\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}\right)^5=0.$$
9. Bizonyítsuk be, hogy
$$4\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}=1.$$
10. Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.
11. Hozzuk zárt alakra a $\sum_{m=0}^{\infty}\binom{2007}{4m}$ összeget.
12. Lefedhető-e a 100×100-as sakktábla 8×1-es dominókkal?